Плоскость и прямая в пространстве

1. Общее уравнение плоскости.

Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7.1}$$

называется *общим уравнением плоскости*.

Геометрический смысл коэффициентов A, B и C в уравнении (7.1): они являются *координатами вектора нормали* $\boldsymbol{n}$ *к этой плоскости*, т.е. вектора перпендикулярного данной плоскости.

2. Уравнение плоскости в отрезках.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{7.2}$$

Заметим, что числа a, b и c имеют простой *геометрический смысл*: они равны алгебраическим величинам отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy и Oz, соответственно (см. рис. 7.1).

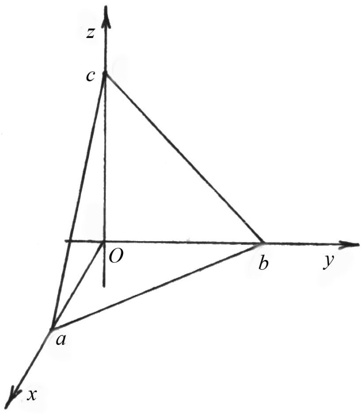

Рис. 7.1

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три различные точки, не лежащие на одной прямой. Известно, что через три точки всегда можно провести плоскость, и она будет единственной, если точки не лежат на одной прямой.

Уравнение *плоскости, проходящей через три точки*, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3}$$

4. Уравнение плоскости, параллельной данному вектору и проходящей через две данные точки.

Пусть дан вектор $\boldsymbol{a}(m, n, l)$ и две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через эти две точки и параллельной вектору $\boldsymbol{a}$, запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & l \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.4)$$

5. Уравнение плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам и проходящей через точку.

Пусть даны два вектора $\boldsymbol{a}_1(m_1, n_1, l_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(m_2, n_2, l_2)$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, то через точку M_1 можно провести единственную плоскость, параллельную векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Уравнение плоскости, параллельной векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через данную точку имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.5)$$

6. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (7.6)$$

7. Нормальное уравнение плоскости.

Рассмотрим произвольную плоскость. Проведем из начала координат прямую, перпендикулярную данной плоскости. Направляющие косинусы этого перпендикуляра: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Обозначим p – расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости. Тогда *нормальное уравнение плоскости* запишется в виде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + \cos\gamma - p = 0 \qquad (7.7)$$

Для того, чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, необходимо умножить все уравнение на нормирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак которого противоположен знаку свободного коэффициента.

8. Расстояние от точки $M'(x', y', z')$ до плоскости, заданной общим уравнением:

$$d = \left| \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad (7.8)$$

9. Общие уравнения прямой.

Прямую можно определить как линию пересечения двух плоскостей. Это и будут *общие уравнения прямой*:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (7.9)$$

причем плоскости не параллельны, и не совпадают, т.е. хотя бы одно из равенств в соотношении $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ не должно выполняться.

10. Канонические уравнения прямой.

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a}(m,\ n,\ l)$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой, и направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a}(m,\ n,\ l)$. Тогда *канонические уравнения прямой* будут иметь вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l} \qquad (7.10)$$

11. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{или} \quad \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1} \qquad (7.11)$$

12. Параметрические уравнения прямой.

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = lt + z_0. \end{cases} \qquad (7.12)$$

13. Взаимное расположение прямых и плоскостей.

1) Пусть в пространстве заданы плоскость α и прямая L:

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad L: \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Условие параллельности прямой L *и плоскости* α эквивалентно условию перпендикулярности нормали $\boldsymbol{n}(A,\ B,\ C)$ к плоскости α и направляющего вектора $\boldsymbol{a}(l,\ m,\ n)$ прямой L и выражается равенством нулю скалярного произведения векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$Al + Bm + Cn = 0 \tag{7.13}$$

Условие перпендикулярности прямой L *и плоскости* α эквивалентно условию коллинеарности векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \tag{7.14}$$

Как легко убедиться, *условие принадлежности прямой* L *к плоскости* α выражается двумя равенствами:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \tag{7.15}$$

Угол φ *между прямой* L и *плоскостью* α находится по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \tag{7.16}$$

2) Пусть в пространстве заданы две прямые своими каноническими уравнениями:

$$L_1: \quad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad L_2: \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Условия параллельности, перпендикулярности L_1 и L_2, а также угол между L_1 и L_2 определяются с использованием направляющих векторов $\boldsymbol{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ данных прямых.

Условие параллельности $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{7.17}$$

Условие перпендикулярности $$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \tag{7.18}$$

Угол между прямыми $$\cos\alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \tag{7.19}$$

3) Пусть в пространстве заданы две плоскости α_1 и α_2 своими общими уравнениями:

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Условия параллельности, перпендикулярности α_1 и α_2, а также угол между α_1 и α_2 определяются аналогично, используя векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ к плоскостям.

Условие параллельности: $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (7.20)$$

Условие перпендикулярности: $$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7.21)$$

Угол между плоскостями: $$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (7.22)$$

Примеры решения задач

1. Найти уравнение плоскости p, проходящей через точку $M(2; 2; -3)$ и параллельной плоскости $p_1: x - 4y - 2z + 1 = 0$.

Решение: Поскольку плоскости параллельны, то вектор нормали $\boldsymbol{n} = (1, -4, -2)$ плоскости p_1 будет вектором нормали и для плоскости p. Применим формулу (7.6): p: $1(x - 2) - 4(y - 2) - 2(z + 3) = 0$ или $x - 4y - 2z = 0$.

2. Найти уравнение плоскости p, проходящей через точку $M_0(-1; 2; 3)$ и через ось Oz.

Решение: Так как p проходит через Oz и начало координат, то в общем уравнении плоскости (7.1) $C = 0$ и $D = 0$. Тогда получаем $Ax + By = 0$. Подставив туда точку $M_0(-1; 2; 3)$, найдем $-A + 2B = 0$ или $A = 2B$ и, следовательно, p: $2Bx + By = 0$ или $2x + y = 0$.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0; 2; 3)$, $M_2(-1; 0; 1)$, $M_3(2; 1; -1)$.

Решение: Используем формулу (7.3):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3 \\ -1-0 & 0-2 & 1-3 \\ 2-0 & 1-2 & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6x - 8y + 5z + 1$$

Следовательно, получаем $6x - 8y + 5z + 1 = 0$.

4. При каких A и C плоскости p_1: $Ax + 2y - z + 3 = 0$ и p_2: $2x + 6y - Cz + 7 = 0$ параллельны?

Решение: Воспользуемся условием параллельности плоскостей (7.20): $\frac{A}{2}=\frac{2}{6}=\frac{-1}{-C}$. Получаем $A=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $C=3$.

5. Найти расстояние между параллельными плоскостями p_1: $6x+2y+9z=0$ и p_2: $6x+2y+9z-11=0$.

Решение: На плоскости p_2 выберем точку M_0. Пусть $x = y = 0$, тогда $z=\frac{11}{9}$, т.е. $M_0(0;\ 0;\frac{11}{9})$. Теперь расстояние между плоскостями будет совпадать с расстоянием от точки M_0 до плоскости p_1. Для нахождения этого расстояния используем формулу (7.8):

$$d=\frac{6\cdot 0+2\cdot 0+9\cdot\frac{11}{9}}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}}=1.$$

6. Составить канонические уравнения прямой по данным общим уравнениям $\begin{cases}x-y-2=0,\\ x+y+z-3=0.\end{cases}$

Решение: Найдем направляющий вектор этой прямой:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-1;-1;2).$$

Далее найдем точку, лежащую на прямой. Пусть в системе уравнений $z = 0$, тогда система упростится: $\begin{cases}x-y=2\\ x+y=3\end{cases}$ и даст решение: $x = 2{,}5$; $y = 0{,}5$. В результате имеем точку на прямой $M_0(2{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$ и канонические уравнения прямой (7.10) примут вид $\frac{x-2{,}5}{-1}=\frac{y-0{,}5}{-1}=\frac{z-0}{2}$.

7. При каком m прямые l_1: $\frac{x-1}{m}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{3}$ и l_2: $\begin{cases}x+2y+z-5=0,\\ x-z=0,\end{cases}$ перпендикулярны?

Решение: Направляющий вектор прямой l_1 есть $\boldsymbol{a}_1=(m,2,3)$. Найдем направляющий вектор прямой l_2: $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

Т.е. $\boldsymbol{a}_2=(-2,2,-2)$. Далее используем условие перпендикулярности (7.18) прямых: $m\cdot(-2)+2\cdot 2+3\cdot(-2)=0$. Отсюда получаем $m=-1$.

8. Найти параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(-1; 2; 3)$ и перпендикулярной к плоскости p: $3x + y - 5z + 1 = 0$.

Решение: Поскольку $l \perp p$, то вектор нормали $\boldsymbol{n} = (3, 1, -5)$ к плоскости p является направляющим вектором прямой l. Т.е. $\boldsymbol{a} = (3, 1, -5)$. Тогда параметрические уравнения (7.12) примут вид

$$\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = -5t + 3. \end{cases}$$

9. Найти точку пересечения плоскости $x - 2y + 3z + 5 = 0$ и прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{4}$.

Решение: Запишем уравнения прямой в параметрическом виде (7.12):

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t + 2, \\ z = 4t. \end{cases}$$

Подставим полученные равенства в уравнение плоскости $(2t + 1) - 2(3t + 2) + 3(4t) + 5 = 0$. Решив полученное уравнение, найдем $t = -\dfrac{1}{4}$. Заменив в параметрических уравнениях параметр t на $-\dfrac{1}{4}$, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}, -1)$.

10. Найти угол между прямой l: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ y + z - 5 = 0, \end{cases}$ и плоскостью p: $2x + y - z + 1 = 0$.

Решение: Найдем направляющий вектор прямой l:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Теперь найдем угол между l и p по формуле (7.16):

$$\sin\varphi = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$