Кривые второго порядка

1. Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть постоянная величина.

Выберем систему координат так, чтобы начало координат O находилось в середине отрезка F_1F_2, а ось Ox, являлась продолжением отрезка OF_2 (см. рис. 8.1). Обозначим $|F_1F_2| = 2c = const$, а сумму расстояний от произвольной точки M до F_1 и F_2 обозначим $r_1 + r_2 = 2a = const$.

Тогда *каноническое уравнение эллипса* будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.1}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

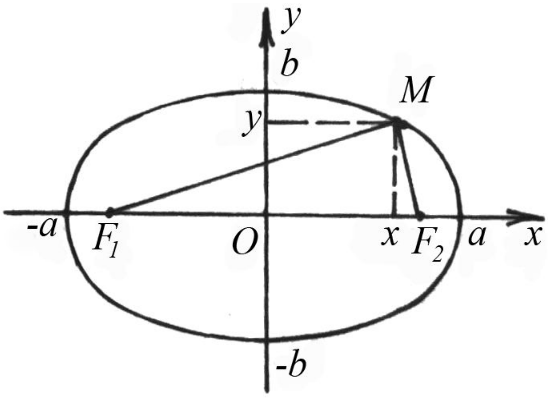

Рис. 8.1

Величины a и b называются *большой и малой полуосями* эллипса. Очевидно, что a и b – это отрезки, отсекаемые эллипсом на координатных осях.

Эксцентриситетом эллипса называется величина, равная $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Учитывая связь между величинами a, b и c: $b^2 = a^2 - c^2$, можно получить другую формулу для эксцентриситета: $\varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$. Отметим, что эксцентриситет эллипса меньше единицы и равен нулю, если эллипс является окружностью.

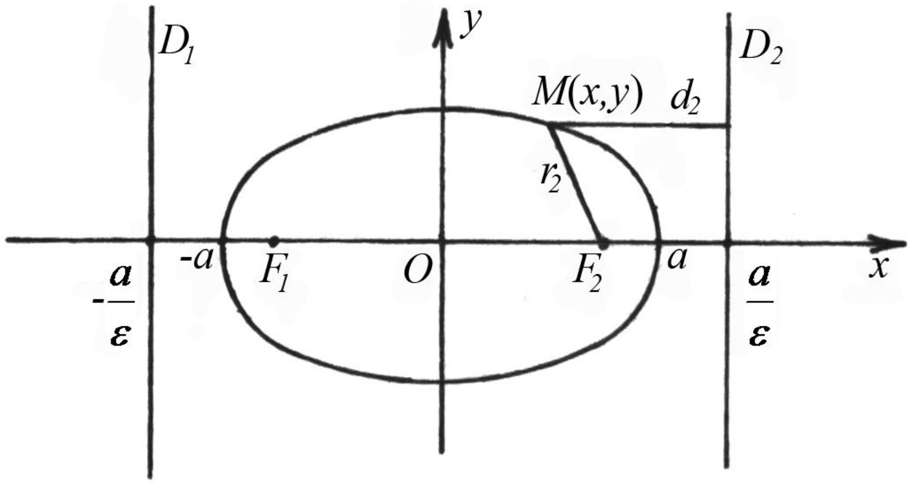

Рис. 8.2

Директрисой эллипса называется прямая, расположенная перпендикулярно большой оси эллипса на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра. Эллипс имеет две директрисы, соответствующие двум фокусам, которые расположены вне эллипса (см. рис. 8.2).

2. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть постоянная величина (разность берется по абсолютной величине).

Выберем систему координат так, чтобы начало координат O находилось в середине отрезка F_1F_2, а ось Ox, являлась продолжением отрезка OF_2 (см. рис. 8.3). Обозначим $|F_1F_2| = 2c = const$, а разность расстояний от произвольной точки M до F_1 и F_2 обозначим $|r_1 - r_2| = 2a = const$.

Тогда *каноническое уравнение гиперболы* будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (8.2)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Величины a и b называются *полуосями* гиперболы.

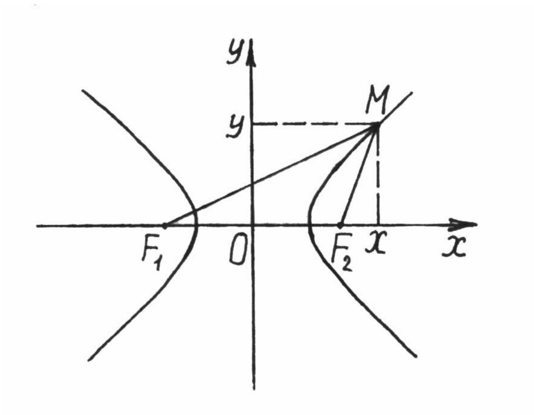

Рис. 8.3

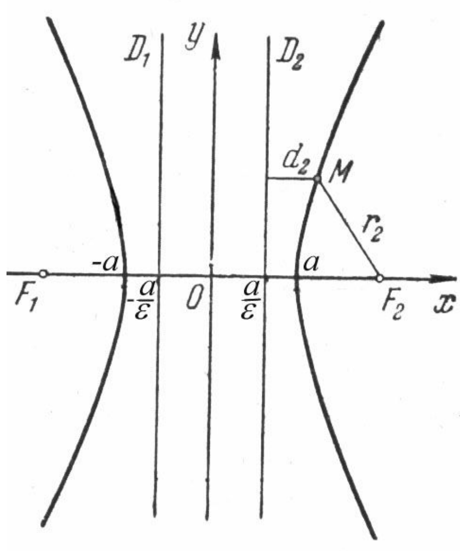

Рис. 8.4

Эксцентриситет гиперболы определяется так же, как и для эллипса $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ или $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$. Ясно, что эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Директрисой гиперболы называется прямая, расположенная перпендикулярно оси гиперболы, которая ее пересекает, на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от ее центра. Гипербола имеет две директрисы, соответствующие двум фокусам (см. рис. 8.4). Обе директрисы не имеют общих точек с гиперболой, так как $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$.

3. Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости F, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой D, называемой *директрисой* (слово «директриса» означает «направляющая»).

Выберем систему координат так, чтобы начало координат O находилось в середине перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую D, а ось Ox являлась продолжением отрезка OF (см. рис. 8.5). Обозначим $|FQ| = p = const$.

Тогда *каноническое уравнение параболы* имеет вид:

$$y^2 = 2px \tag{8.3}$$

где величина p называется *фокальным параметром*.

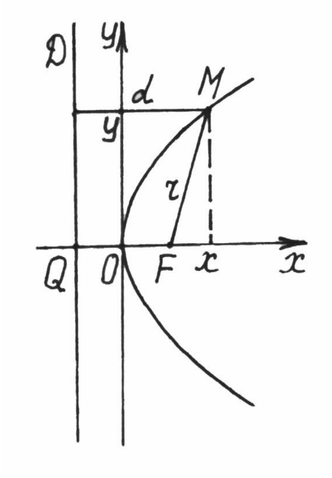

Рис. 8.5

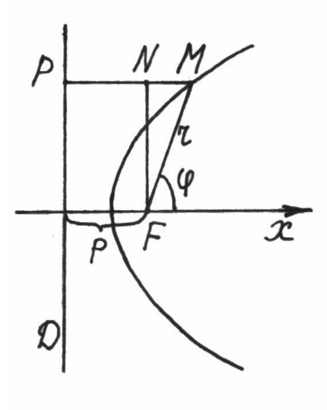

Рис. 8.6

4. Единое определение кривой второго порядка.

Отношение расстояния r от точки M до фокуса к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса (гиперболы), т.е. $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ и $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Единое определение эллипса, гиперболы и параболы: геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой, есть постоянная величина, называется *эллипсом*, если это отношение меньше единицы, и *гиперболой*, если это отношение больше единицы. Отметим, что в определении параболы это отношение равно единице. Поэтому *эксцентриситет параболы* всегда равен единице.

5. Полярное уравнение кривой второго порядка.

Рассмотрим некоторую кривую: эллипс, гиперболу или параболу. Пусть F – фокус кривой, D – соответствующая ему директриса, p – расстояние от F до D. Отметим, что в случае гиперболы мы рассматриваем только одну ее ветвь. Пусть полюс полярной системы координат совпадает с F, а полярная ось перпендикулярна директрисе D и направлена, как указано на рисунке 8.6.

Тогда *полярное уравнение кривой второго порядка* имеет вид:

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \qquad (8.4)$$

где ε – эксцентриситет кривой.

Если $0 < \varepsilon < 1$, то получаем уравнение эллипса, если $\varepsilon = 1$, то уравнение параболы, если $\varepsilon > 1$, то уравнение одной ветви гиперболы.

Уравнение второй ветви гиперболы будет иметь вид: $r = \frac{-p\varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$.

Примеры решения задач

1. Расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3. Написать уравнение эллипса.

Решение: Так как $2c = 8$ и $b = 3$, то $c = 4$, $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 5$, и уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2. Даны: вещественная полуось $a = 2\sqrt{5}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$. Написать уравнение гиперболы.

Решение: Так как $c = a\varepsilon$, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = 2$ и уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3. Привести уравнение $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ к каноническому виду, определить тип кривой.

Решение: Выполним приведение к полным квадратам:

$$2(x-1)^2 + 3(y+1)^2 - 12 = 0.$$

Приводим уравнение к каноническому виду:

$$\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Очевидно, это уравнение является уравнением эллипса. Координаты центра кривой (1; –1). Полуоси эллипса $a = \sqrt{6}, b = 2$.

4. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее: $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.

Решение: Выделим полные квадраты с переменными x и y:

$$9(x-1)^2 - 25(y+2)^2 - 225 = 0.$$

Перепишем это уравнение в каноническом виде:

$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Полученное уравнение является уравнением смещенной гиперболы, центр которой находится в точке с координатами $(1, -2)$. Полуоси гиперболы $a = 5$ и $b = 3$. Для построения гиперболы сначала необходимо отметить центр гиперболы, затем начертить прямоугольник со сторонами 10 и 6, центр которого совпадает с центром гиперболы (см. рис. 8.7). Далее надо провести диагонали в полученном прямоугольнике, которые будут являться асимптотами гиперболы, после этого можно построить ветви гиперболы (см. рис. 8.8).

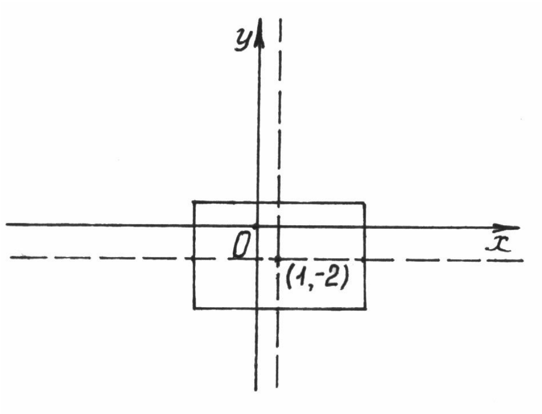

Рис. 8.7

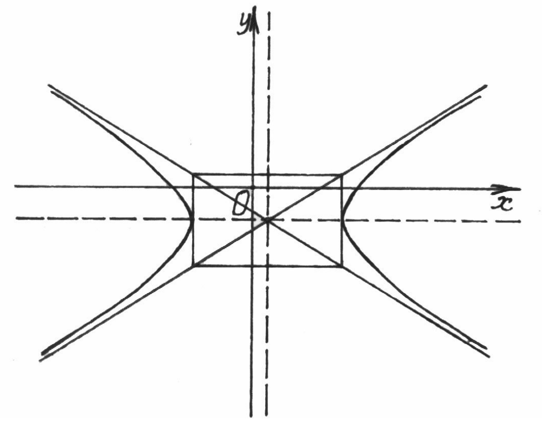

Рис. 8.8

5. Привести уравнение $x^2 + 6x + y + 10 = 0$ к каноническому виду, определить ее тип и построить кривую.

Решение: Выполним приведение к полному квадрату:

$$(x+3)^2 = -(y+1).$$

Очевидно, это есть уравнение параболы. Координаты вершины параболы $(-3; -1)$, ветви ее направлены вниз. Фокальный параметр $p = \frac{1}{2}$. Парабола построена на рис. 8.9.

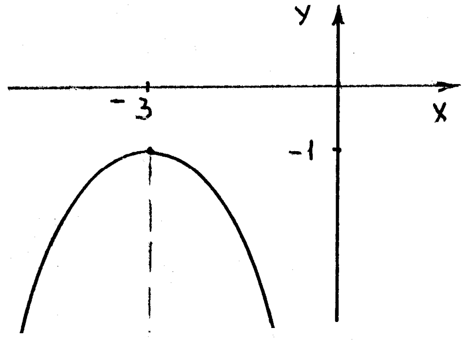

Рис. 8.9

6. Привести уравнение $x^2 + y^2 = 4x$ к каноническому виду. Записать для него полярное уравнение.

Решение: Выполним приведение к полному квадрату: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Это уравнение окружности с центром в точке (2; 0), радиуса $R = 2$. Переходя к полярному уравнению, получим:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi \quad \text{или} \quad r = 4\cos\varphi.$$