Лекция 11. Множества. Действительные числа. Функции одной переменной

Множества

Понятие множества и его элементов является первичным понятием в математике. Это понятие можно пояснить словами «совокупность», «собрание». Множества обозначают большими латинскими буквами A, B,…, X, Y,… а его элементы – малыми буквами a, b,..., x, y ,… . Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A, а запись $b \notin A$ означает, что b не является элементом множества A.

$B = \{a, b, c, ...\}$ - задание множества B перечислением его элементов. Например, $B = \{1, 2, 3, ..., 2n+1, ...\}$ - множество нечетных положительных чисел.

$B = \{a \mid R(a)\}$ - задание множества B условием $R(a)$, которому подчинены элементы множества B. Например, $B = \{r \mid r^2 - 3r + 2 \neq 0\}$ - множество чисел, не являющихся корнями квадратного уравнения $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Если для любого $a \in A$ верно $a \in B$, то пишут $A \subset B$ и называют A подмножеством множества B. Если при этом найдется элемент $a \in B$ такой, что $a \notin A$, то множество A – собственное подмножество множества B. Для удобства вводится пустое множество $\varnothing$; считается, что $\varnothing \subset A$ при любом множестве A.

Операции над множествами. Пусть A и B некоторые множества.

1) $A \cup B = \{a : a \in A \text{ или } a \in B\}$ – *объединение* множеств A и B (см. рисунок 1).

2) $A \cap B = \{a : a \in A \text{ и } a \in B\}$ – *пересечение* множеств A и B (см. рисунок 1).

3) $A \setminus B = \{a : a \in A \text{ и } a \notin B\}$ – *разность* множеств A и B (см. рисунок 1).

Если $A \subset B$, то множество $B \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества B и обозначается $\overline{A}$.

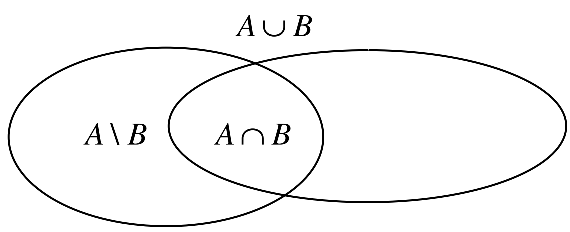

Рисунок 1

Введенные операции обладают следующими свойствами.

1) идемпотентность $A \cup A = A,\ A \cap A = A$;

2) коммутативность $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$;

3) ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

4) дистрибутивность $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Докажем, к примеру, докажем дистрибутивность

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Если элемент x принадлежит левой части этого равенства, то он принадлежит одновременно как $A \cup B$, так и C. Но тогда x обязательно принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Пусть для определенности $x \in A$; тогда $x \in A \cap C$, а, следовательно, и правой части равенства. Наоборот, пусть x принадлежит правой части равенства; тогда x принадлежит одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$. Пусть для определенности $x \in A \cap C$; тогда x принадлежит как A, так и C, следовательно, x принадлежит как $A \cup B$, так и C, то есть левой части доказываемого равенства.

5) законы де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

6) $A \cap \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \varnothing,\ \overline{\overline{A}} = A,\ A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Действительные числа

Приведем основные множества, которые рассматриваются в вопросах математического анализа и в математике вообще.

$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ,..., \pm n, ...\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{ q \mid q = \dfrac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N \right\}$ – множество рациональных чисел.

Имеем очевидное включение $N \subset Z$. Для любого $n \in Z$ верно $n = \dfrac{n}{1} \in Q$. Поэтому $N \subset Z \subset Q$.

Числа, не представимые в виде $\dfrac{m}{n}$, называются *иррациональными числами*. Например, такими являются числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$.

Множество R действительных чисел – это объединение множества Q и множества всех иррациональных чисел.

Приведем операции, определенные на множестве R.

1. Операция сложения. Для любой пары чисел a и b определено единственное число, называемое их суммой и обозначаемое $a+b$. Операция сложения удовлетворяет условиям:

а) $a+b=b+a$;

б) $a+(b+c)=(a+b)+c$, $c \in R$;

в) существует такое число, называемое *нулем* и обозначаемое 0, что $a+0=a$ для любого $a \in R$;

г) для любого числа a существует число, называемое ему *противоположным* и обозначаемое $-a$, для которого $a+(-a)=0$.

Число $a+(-b)$ называется *разностью* чисел a, b и записывается в виде $a-b$.

2. Операция умножения. Для любой пары чисел a и b определено единственное число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab, такое, что выполняются следующие условия.

а) $ab=ba$;

б) $a(bc)=(ab)c$, $c \in R$;

в) существует такое число, называемое *единицей* и обозначаемое 1, что $a1=a$ для любого $a \in R$;

г) для любого $a \neq 0$ существует число, называемое *обратным* и обозначаемое $\frac{1}{a}$, или $1/a$, для которого $a \cdot \frac{1}{a}=1$.

Число $a \cdot \frac{1}{b}$, $b \neq 0$, называется *частным* от деления a на b и обозначается $a:b$, или $\frac{a}{b}$, или a/b.

Операции умножения и сложения связаны равенством

$$(a+b)c=ac+dc,$$

которое выполняется для любых $a, b, c \in R$.

Геометрически множество R изображается направленной прямой, называемой *числовой осью*, а числа – точками этой прямой. Вместо слова «число» говорят слово «точка», а вместо слов «множество R» – «числовая прямая».

На множестве действительных чисел определено отношение порядка: для каждой пары чисел a и b имеет место одно и только одно из соотношений: $a=b$, $a<b$, $a>b$, причем $a < b$, если точка b следует за точкой a, и $a > b$, если точка a следует за точкой b. Справедливо свойства порядка:

а) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;

б) если $a < b$, то для любого c имеет место $a + c < b + c$;

в) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Приведем два важных свойства множества действительных чисел.

Плотность R. Если для любых чисел a и b верно $a < b$, то найдется число c такое, что верны неравенства $a < c < b$.

Непрерывность R. Пусть X и Y любые непустые подмножества R и такие, что для каждой пары чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \le y$. Тогда существует число a, удовлетворяющее условию $x \le a \le y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$ (см. рис. 2).

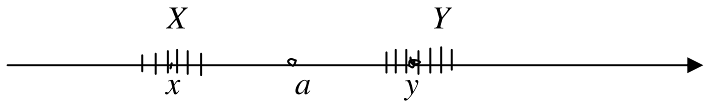

Рисунок 2

Для любого $a \in R$ и любого $n \in N$ степень a^n по определению есть

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n \text{ сомножителей}).$$

По определению

$$a^0 = 1, a > 0, \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \ne 0, \ n \in N.$$

Пусть $a > 0$, а натуральное число $n \ge 2$. По определению число b есть корень n – ой степени из числа a, если $b^n = a$. Обозначение корня: $b = \sqrt[n]{a}$.

Корень четной степени определен для чисел $a \ge 0$ и имеет два значения. Если $b = \sqrt[2k]{a}$, то $-b = \sqrt[2k]{a}$ так же корень, поскольку $(-b)^{2k} = \left((-b)^2\right)^k = \left(b^2\right)^k = b^{2k} = a$.

Корень нечетной степени определен для любых $a \in B$ и имеет одно значение $b = \sqrt[2k+1]{a}$.

Для любого числа $a \in R$ неотрицательное число

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

называется его *абсолютной величиной*, или *модулем*. Нетрудно проверить выполнение равенства $|a| = \max\{-a, a\}$.

Для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства

$$|a+b| \le |a| + |b|, \ \ ||a| - |b|| \le |a-b|. \tag{1}$$

Докажем первое неравенство. Если a, b оба неотрицательны или оба неположительны, то неравенство выполняется (он обращается в равенство). Пусть, например, $a \ge 0$, а $b \le 0$. Тогда

$$a + b \le a + |b| = |a| + |b|,$$

$$-a - b \le -b = |b| \le |a| + |b|.$$

Отсюда

$$|a+b| = \max\{-a-b,\, a+b\} \le |a| + |b|,$$

А это и требовалось доказать.

Случаи подмножеств R. Окрестности. Расширенная числовая прямая

Приведем определения некоторых важных подмножеств числовой прямой или, что одно и то же, множества действительных чисел.

Множество

$$[a, b] = \{x \mid x \in R,\, a \le x \le b\}$$

называется *отрезком*, множество

$$(a, b) = \{x \mid x \in R,\, a < x < b\}$$

называется *интервалом*, множества

$$[a, b) = \{x \mid x \in R,\, a \le x < b\},\ (a, b] = \{x \mid x \in R,\, a < x \le b\}$$

называются *полуинтервалами*.

Эти множества обобщенно называются *промежутками* числовой прямой. Точки a и b называются *концами* этих промежутков, а точки x, удовлетворяющие неравенствам $a < x < b$, - *внутренними точками* промежутков.

В математических рассуждениях важным является понятие окрестности точки. Множество $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ для числа $a \in R$ и произвольного $\varepsilon > 0$ называется ε – *окрестностью* тачки a. Множество $\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ называется *проколотой* ε - *окрестностью* точки a. Часто окрестности будем обозначать символами $U(a)$ и $\overset{\circ}{U}(a)$.

С помощью промежутков на числовой прямой можно определить элементы $+\infty$, $-\infty$, которые называются соответственно *плюс бесконечностью*, *минус бесконечностью*. Элемент $+\infty$ определяется неравенством

$$x < +\infty$$

верным для любого $x \in R$; элемент $-\infty$ определяется неравенством $-\infty < x$, верным для любого $x \in R$.

Пополнение множества действительных чисел элементами $-\infty$ и $+\infty$ приведет к так называемому *расширенному множеству действительных чисел* $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Приведем ε – окрестности бесконечностей. Для произвольного $\varepsilon > 0$ определяются

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right],$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

С помощью окрестности определяется элемент ∞, называемый *бесконечностью без знака*: для произвольного числа $\varepsilon > 0$ его окрестностью является множество

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{x \mid x \in R, |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Важным свойством $\overline{R}$ является то, что два различных элемента $\overline{R}$ имеют непересекающиеся окрестности. Например, для любых конечных точек a и b (для определенности считаем, что $a < b$), такими будут окрестности $U(a, \varepsilon)$ и $U(b, \varepsilon)$, $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.

Если a - произвольная конечная точка, а b, к примеру, есть $+\infty$, то непересекающимися будут окрестности $U(a, \varepsilon)$ и $U(+\infty, \varepsilon')$ при любом $\varepsilon' > 0$, если $a + \varepsilon \le 0$, а если $a + \varepsilon > 0$, то при $0 < \varepsilon' \le \dfrac{1}{a+\varepsilon}$.

Ограниченные множества

По определению множество $A \subset R$ *ограничено сверху*, если найдется число b такое, что $x \le b$ для любого $x \in A$. Число b в этом случае называется числом, *ограничивающим сверху* множество A. Множество A *ограничено снизу*, если найдется число a такое, что $a \le x$ для всех $x \in A$. Число a называется числом, *ограничивающим снизу* A.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Пусть множество A ограничено сверху. Наименьшее из всех чисел, ограничивающих A сверху, называется *точной верхней гранью* множества A и обозначается $\sup\limits_{x\in A} x$ или $\sup A$. Другими словами, число $\beta = \sup A$, если выполнены два условия:

а) для любого $x \in A$ верно $x \le \beta$;

б) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x' \in A$ такой, что $\beta - \varepsilon < x'$.

Пусть множество A ограничено снизу. Наибольшее из всех чисел, ограничивающих A снизу, называется *точной нижней гранью* множества A и обозначается $\inf\limits_{x\in A} x$ или $\inf A$. Другими словами, число $\alpha = \sup A$, если выполнены два условия:

а) для любого $x \in A$ верно $x \le \beta$;

б) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x' \in A$ такой, что $x' < \alpha + \varepsilon$.

Примеры:

1) Пусть $A = [a, b]$. Тогда $\inf A = a$, $\sup A = b$.

2) Пусть $A = (a, b)$. Тогда $\inf A = a$, $\sup A = b$.

Отметим, что числа $\inf A$ и $\sup A$ могут принадлежать множеству A, могут и не принадлежать этому множеству.

Теорема 1. Всякое ограниченное сверху (снизу) непустое числовое множество A имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Пусть B есть множество всех чисел, ограничивающих множество A сверху. Тогда для любой пары чисел $x \in A$, $b \in B$ верно неравенство $x \le b$. В силу свойства непрерывности множества действительных чисел найдется число $\beta \in R$ такое, что выполняется неравенства $x \le \beta \le b$ какие бы ни были $x \in A$ и $b \in B$. Неравенство $x \le \beta$, справедливое для всех $x \in A$, означает, что число β ограничивает A сверху; неравенство $\beta \le b$, справедливое для всех $b \in B$, означает, что число β является наименьшим из всех чисел, ограничивающих A сверху. По определению $\beta = \sup A$.

Аналогично рассуждая, можно показать существование $\inf A$, если множество A ограничено снизу. Теорема доказана.

Принцип вложенных отрезков

По определению система числовых отрезков

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

где $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, есть *система вложенных отрезков*, если

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1,$$

то есть если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$.

Теорема 2. Всякая система вложенных числовых отрезков имеет непустое пересечение.

Доказательство. Пусть дана система вложенных отрезков,

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\},\ B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}.$$

В силу определения системы вложенных отрезков для любых индексов m и n имеем неравенство $a_m \le b_n$. Поэтому по свойству непрерывности действительных чисел найдется такое число ξ, что для всех индексов m и n выполняются неравенства

$$a_m \le \xi \le b_n,$$

а тогда и неравенства $a_n \le \xi \le b_n$, $n = 1, 2, ...$. Последнее означает, что точка ξ принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Теорема доказана.

Приведем условие, при котором пересечение системы вложенных отрезков состоит из единственной точки. Для этого потребуется следующее определение.

Длины $b_n - a_n$ отрезков $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $a_n \le b_n$, $n = 1, 2, ...$, называются *стремящимися к нулю*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε (это натуральное число зависит от числа ε), что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

Теорема 3. Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$, длины которых стремятся к нулю, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам данной системы; при этом

$$\xi = \sup A = \inf B,$$

где $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$.

Доказательство. Если точки ξ и τ принадлежат всем отрезкам рассматриваемой системы отрезков, то есть

$$\xi \in [a_n, b_n],\ \tau \in [a_n, b_n],\ n = 1, 2, ...,$$

то для всех номеров n выполняются неравенства

$$|\tau - \xi| \le b_n - a_n,$$

а, следовательно, в силу условия $b_n - a_n < \varepsilon$ из определения длин отрезков, стремящихся к нулю, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|\tau - \xi| < \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ и произвольное число, то это возможно только при равенстве $\xi = \tau$.

Единственность числа, принадлежащего всем отрезкам, установлено. Это число ξ удовлетворяет неравенствам

$$a_n \le \xi \le b_n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Из этих неравенств видно, что число ξ одновременно является числом, ограничивающим множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ сверху, множество $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ снизу. Тогда по определениям точной верхней и точной нижней граней справедливы неравенства

$$a_n \le \sup A \le \xi \le \inf B \le b_n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Это означает, что числа $\sup A$, ξ и $\inf B$ принадлежат всем отрезкам $[a_n, b_n]$и, следовательно, они равны, то есть имею место равенства в условии теоремы.

Мощность множества

Введем понятие *мощности* множества.

Говорят, что между множествами *A* и *B* установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу множества *A* сопоставлен единственный элемент множества *B*, так что различным элементам из *A* сопоставлены различные элементы из *B* и каждый элемент из *B* оказывается сопоставленным некоторому элементу из *A*.

Например, между множеством всех четных натуральных чисел и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & \dots, & 2n, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \end{array}$$

Множества A и B, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными*, при этом пишут $A \sim B$.

Если $A \sim B$, то говорят, что множества *A* и *B* имеют *одинаковую мощность*.

Множество *A* называется *конечным*, если существует такое число $n \in N$, что $A \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}$. При этом говорят, что множество *A* имеет мощность *n*. Мощность пустого множества $\varnothing$ считается равной нулю.

Множество *A* называется *счетным*, если $A \sim N$, при этом говорят, что *A* имеет счетную мощность. Множество называется *несчетным*, если оно не является счетным.

Из определения счетного множества следует, что все элементы некоторого счетного множества A можно перенумеровать с помощью натуральных чисел и записать его в виде:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}.$$

Теорема 4. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двух множеств. Пусть имеются счетные множества $A = \{a_1, a_2, ...\}$ и $B = \{b_1, b_2, ...\}$. Выпишем в одну строку все элементы обоих этих множеств по правилу:

$$a_1, b_1\ , a_2, b_2\ , a_3, b_3, ...$$

Теперь все эти элементы можно перенумеровать по порядку следования в строке. Элемент, встречающийся два раза (то есть такой, который входит и в A, и в B), естественно, приобретает номер в первый раз, а во второй раз пропускается. В результате каждый элемент объединения множеств A и B получит свой номер.

Аналогичным образом теорема доказывается в случае трех, четырех или вообще любого конечного числа множеств. В случае счетной совокупности счетных множеств

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}, ...\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ..., a_{2n}, ...\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, ..., a_{kn}, ...\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

выписывание всех элементов этих множеств в одну строку проведем по группам элементов с равной суммой индексов:

$$a_{11}; a_{22}, a_{12}; a_{31}, a_{22}, a_{13}; a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14} ....$$

Нумерацию элементов этой строки проводим выше описанным способом. Теорема доказана.

Пример. Множество целых чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ,..., \pm n, ...\}$ счетно, как объединение двух счетных множеств $1, 2, 3, ...$ и $0, -1, -2, -3, ...$

Теорема 5. Множество всех рациональных Q чисел является счетным множеством.

Доказательство. Множество все рациональных чисел модно представить как объединение следующих счетных множеств:

1) множества A_1 всех целых чисел $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$

2) множества A_2 всех дробей вида $\frac{n}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$;

3) множества A_3 всех дробей вида $\frac{n}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$;

....

k) множества A_k всех дробей вида $\frac{n}{k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$;

....

Множества A_1, A_2, …, A_k, … составляют счетную совокупность множеств и поскольку каждое из них счетно, то по доказанной выше теореме их объединение счетно. Теорема доказана.

Теорема 6. Множество всех действительных чисел R – несчетное множество.

Доказательство. Для доказательства достаточно установить, что множество действительных чисел отрезка $[0; 1]$ образует несчетное множество.

Допустим, что, напротив, множество всех действительных чисел отрезка $[0; 1]$ счетно и все их можно расположить в последовательность $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$. Имея эту последовательность, построим следующим образом систему вложенных друг в друга отрезков.

Разделим отрезок $[0; 1]$ на три равные части. Где бы ни находилась точка x_1, она не может принадлежать одновременно всем трем отрезкам $[0; 1/3]$, $[1/3; 2/3]$, $[2/3; 1]$. Пусть Δ_1 один из этих отрезков, не содержащий x_1. Теперь обозначим через Δ_2 ту из трех равных частей отрезка Δ_1, которой не принадлежит точка x_2. Далее делим отрезок Δ_2 на три равные части и из них выбираем тот отрезок Δ_3, которому не принадлежит точка x_3. Продолжая построения отрезков и далее, получим бесконечную последовательность Δ_1, Δ_2, …, Δ_n, … вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. В силу доказанной ранее теоремы существует единственная точка ξ, принадлежащая каждому отрезку из указанной последовательности отрезков и, следовательно, не может совпадать ни с одной из точек x_n. Это показывает, что последовательность $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ не может исчерпывать всех точек отрезка $[0; 1]$ и, следовательно, противное утверждению теоремы неверно. Теорема доказана.

Множество A называется множеством *мощности континуум*, если $A \sim R$.

Числовая функция.

Пусть X, Y - непустые числовые множества. Функцией, определенной на множестве X со значениями во множестве Y, называется *определенное правило*, по которому каждому числу множества X приведено в соответствие единственное число множества Y. Это соответствие меду элементами множеств записываю в виде равенства

$$y = f(x),$$

в котором буква x, применяемая для обозначения чисел множества X, называется *аргументом* функции, а буква y, применяемая для обозначения чисел множества Y, называется *функцией аргумента* x.

Применяют так же и такое обозначение функции: $f : X \to Y$.

Часто аргумент x называют независимой переменной, y – зависимой переменной.

Число $y = f(x)$ называется образом числа x, а x в свою очередь – прообразом y.

Множество X называется *областью задания* или *определения функции*, множество всех образов – множеством *значений функции* и обозначается символом Y_f.

В геометрической интерпретации функция $y = f(x)$ – это отображение множества X числовой прямой *в* множество Y числовой прямой. Если $Y_f = Y$, то функция определяется как отображение множества X *на* множество Y. В последнем случае каждому числу y найдется его прообраз x.

Примеры:

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $X = [-1; 1]$. Областью значений является $Y_f = [0; 1] \subset R$.

2) $y = \operatorname{sign} x, \ \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Здесь $X = R$, $Y = \{-1; 0; 1\}$. Множество Y состоит из 3-х элементов.

Особое место в математическом анализе занимает так называемая взаимно однозначная функция. По определению функция $y = f(x)$ есть *взаимно однозначная функция*, если двум различным значениям аргумента x ставится в соответствие два различных знамения функции y, то есть для любых значений x_1 и x_2 аргумента таких, что $x_1 \neq x_2$ верно неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$.

График функции $f : X \to Y$ - это множество упорядоченных пар чисел

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in X, \ y = f(x)\}.$$

Для изображения графика Г применяется плоскость Oxy, где на оси Ox расположено множество X, а на оси Oy - множество Y. Для однозначных функций прямая, перпендикулярная оси Ox и проходящая через любую точку $x \in X$, пересекает кривую Г в единственной точке.

Основные способы задания функций

1. *Аналитический* – задание функции формулой, то есть с помощью набора изученных и специально обозначенных функций задаются действия для получения образа.

При задании функции указывается формула $y = f(x)$ и область определения функции X. Если область определения не указана, то за нее принимают область допустимых значений переменной x, которая называется *областью существования функции*.

2. *Графический* – задание функции с помощью кривой в плоскости Oxy, причем кривая обладает тем свойством, что любая прямая, перпендикулярная оси Ox, пересекает кривую не более, чем в одной точке. Совокупность абсцисс точек этой кривой есть область определения X. Соответствующее $x \in X$ значение функции y находят, проводя перпендикуляр к оси Ox через точку x в направлении кривой. Ордината y точки пересечения перпендикуляра и кривой и будет значением функции.

3. *Табличный* - соответствие между значениями аргумента x и функции y указывают в таблице:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

Этот способ задания полностью определяет функцию $f : X \to Y$ с конечным множеством X.

Операции над функциями

1. Арифметические операции. Пусть функции $f : X \to Y$ и $\varphi : X \to Z$ заданы формулами. Для этих функций определяются *сумма* $f + \varphi$, *разность* $f - \varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* $\frac{f}{\varphi}$. Значения этих функций находятся по формулам:

$$f(x)+\varphi(x),\ f(x)-\varphi(x),\ f(x)\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)},\ x\in X,$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x)\neq 0$ на множестве X.

2. Композиция функций. Пусть $\varphi : X \to Y_1$ и $f : Y_2 \to Z$, имеет место включение $Y_1 \subset Y_2$. Тогда возможно образование новой функции $F : X \to Z$, или $z = F(x),\ x\in X$, причем $F(x)= f(\varphi(x))$. Эта новая функция называется *композицией* функций φ и f. Применяют обозначения: $F = f \circ \varphi$ и $F(x)= f \circ \varphi(x)$. Композицию функций еще называют *сложной* функцией.

Пример. Пусть $\varphi(x)= x^2$, $f(x)=1-x$. Имеем $X = R$, $Y_1 = [0; +\infty)$ - множества определения и значений функции φ, $Y_2 = (-\infty; +\infty)$ - множество определения функции f. Поскольку $Y_1 \subset Y_2$, то из этих функций можно образовать сложную функцию $f(\varphi(x))=1-x^2$. Так же имеем: множество значений функции f принадлежит множеству определения функции φ (множества равны). Поэтому можно образовать сложную функцию $\varphi(f(x))=(1-x)^2$.

Обратная функция

Пусть $f : X \to Y$ является взаимно однозначной функцией. Функция, определенная на множестве Y_f и ставящая в соответствие числу $y\in Y_f$ его прообраз $x\in X$, называется *обратной функцией* к функции f. Обозначения обратной функции: f^{-1}, $f^{-1} : Y_f \to X$, $x = f^{-1}(y),\ y\in Y_f$.

Из определения обратной функции следуют равенства, справедливые для любого $x\in X$ и $y\in Y_f$:

$$f^{-1} \circ f(x)= x,\ f \circ f^{-1}(y)= y.$$

Пример. Функция $y = \sqrt{x}$, $X = [0; +\infty)$, является взаимно однозначной функцией; $Y_f = [0; +\infty)$. Для нахождения обратной функции решим уравнение $y = \sqrt{x}$ относительно x:

$$y^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2, \; y^2 = x.$$

Отсюда $f^{-1}(y) = y^2$ и эта обратная функция определена на множестве $Y_f = [0; +\infty)$.

Принято для обозначения независимой переменной использовать букву x, для зависимой переменной – букву y. Поэтому обратную функцию записывают в виде $y = f^{-1}(x)$.

Графики функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Основные элементарные функции. Элементарные функции.

Основные множества элементарных функций

Приведем *основные элементарные функции.*

1) Постоянная функция: $y = C$, где C - константа. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси Ox.

2) Степенная функция: $y = x^a$, где a – любое действительное число.

На рисунке 3 приведены графики функции $y = x^n$ при различных целых положительных значениях n. В этом случае степенная функция определена при любом x.
Если степень является целым отрицательным числом, функция не определена только при $x = 0$. На рисунке 4 приведены графики функции $y = x^n$ при $n = -1$ и $n = -2$.

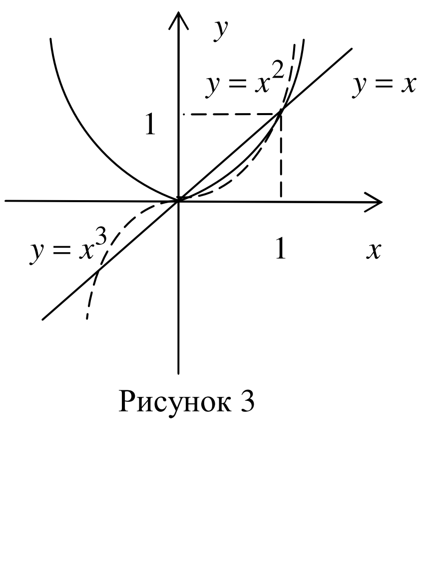

Рисунок 3

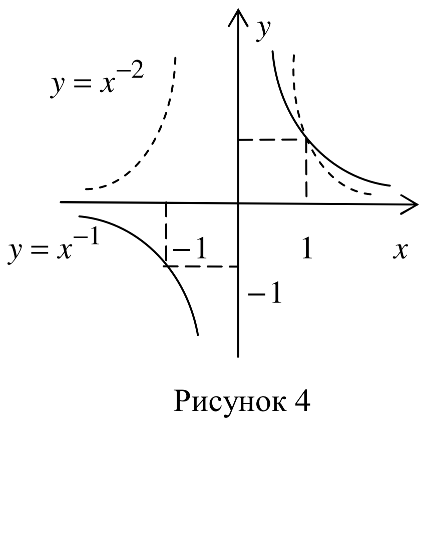

Рисунок 4

Если $a = \dfrac{m}{n}$ – дробное, то функция определена при нечетном n для любого $x \in R$, а при четном n для $x > 0$. На рисунке 5 приведены графики функции $y = x^a$, где $a = \dfrac{1}{n}$ и $n = 2$, $n = 3$.

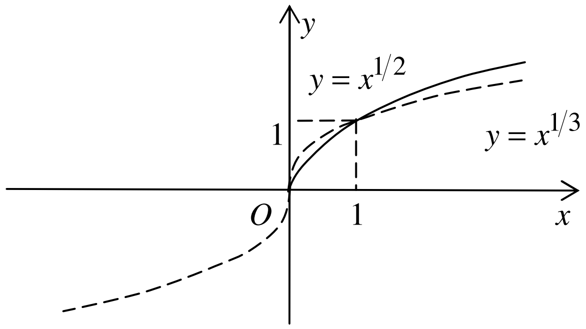

Рисунок 5

3) Показательная функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, (см. рисунок 6).

4) Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, (см. рисунок 7).

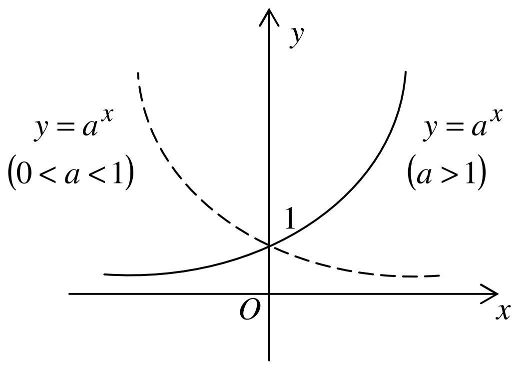

Рисунок 6

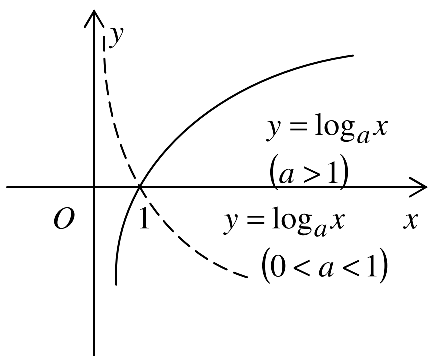

Рисунок 7

5) Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ (см. рисунок 8), $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ (см. рисунок.9).

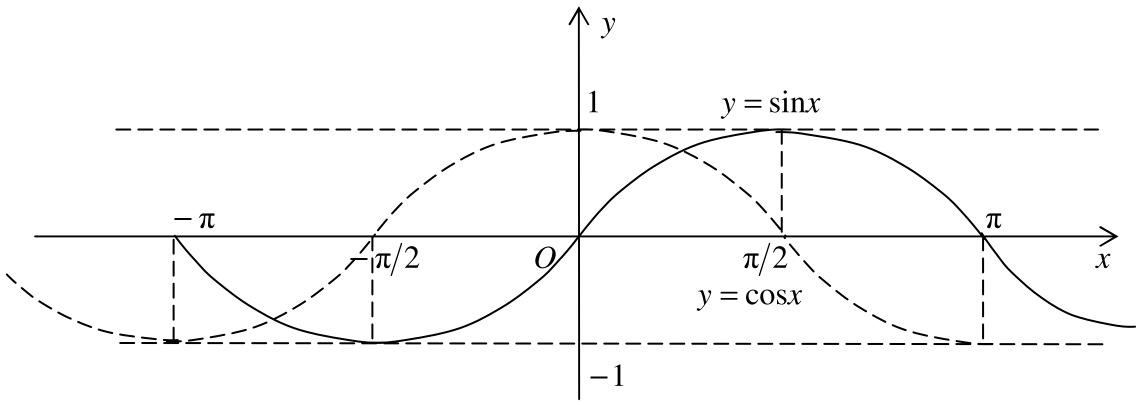

Рисунок 8

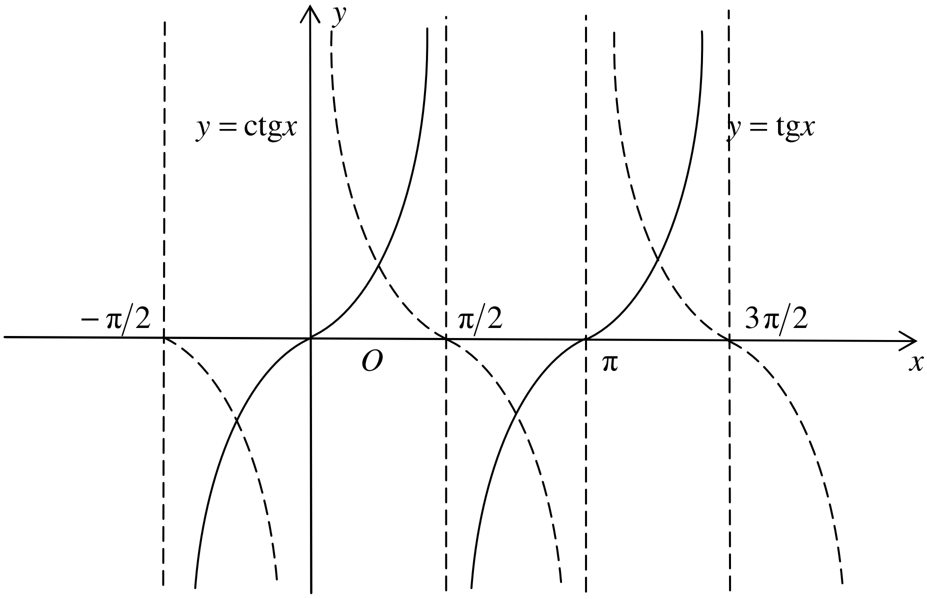

Рисунок 9

6) Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ (см. рисунок 10), $y = \arccos x$ (см. рисунок 11), $y = \operatorname{arctg} x$ (см. рисунок 12), $y = \operatorname{arcctg} x$ (см. рисунок 13).

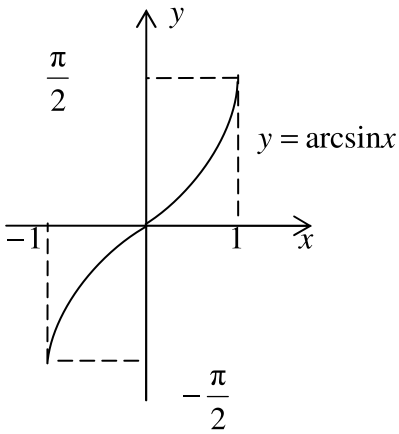

Рисунок 10

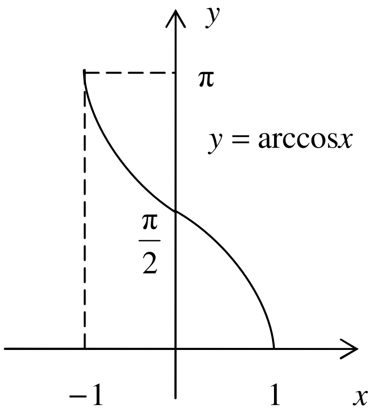

Рисунок 11

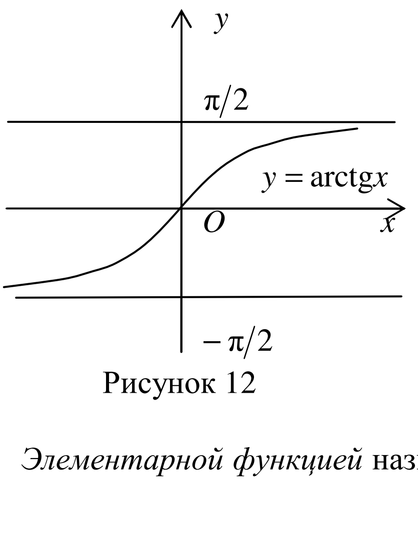

Рисунок 12

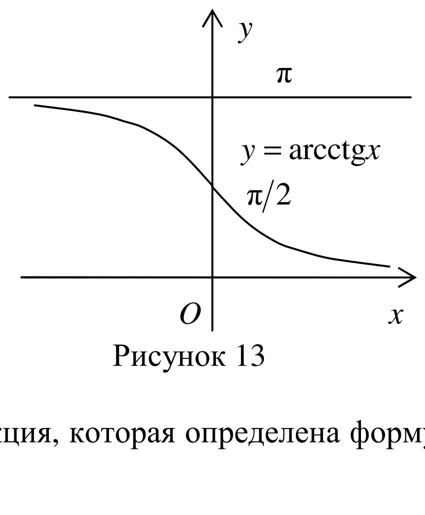

Рисунок 13

Элементарной функцией называется функция, которая определена формулой $f(x)$, содержащей лишь конечное число арифметических операций над основными элементарными функциями и конечное число композиций элементарных функций.

Примеры:

1) $f(x)=\sin x+x^2 2^x$ является элементарной функцией, так как содержит только арифметические операции над основными элементарными функциями $\sin x$, x^2, 2^x.

2) $f(x)=|x|$. Поскольку $|x|=\sqrt{x^2}$, то функция составлена с помощью композиции элементарных функций x^2, $\sqrt{x}$ и будет элементарной.

3) Функция $y=x!$, где $x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\, x$, определенная на множестве натуральных чисел, не является элементарной.

Рассмотрим основные множества элементарных функций.

I_1 - множество *многочленов* или *целых рациональных функций* вида

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^n,\ a_n\neq 0$$

где числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются коэффициентами многочлена, натуральное число n - степень многочлена.

I_2 множество *дробно рациональных функций* вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x), Q(x)\in I_1$.

$I_1\cup I_2$ - множество *рациональных функций.*

I_3 - множество иррациональных функций. Каждая из иррациональных функций задана формулой, содержащей арифметические операции над функциями из $I_1\cup I_2$ и композиции функций из $I_1\cup I_2$ и степенной функции x^a с дробным показателем степени a. На пример, иррациональной будет функция

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}-\sqrt[3]{x^2+2x+3}.$$

$I_1\cup I_2\cup I_3$ - *множество алгебраических функций.*

I_4 - множество *трансцендентных функций*. Трансцендентная функция - это элементарная функция, не являющаяся алгебраической функцией. Например, функция

$$f(x)=\log_2 x+2^{\operatorname{tg} x}-\arcsin x$$

является трансцендентной функцией.

Алгебраические функции и трансцендентные функции – это основной запас элементарных функций, с которым придется иметь дела в курсе математики.

Некоторые общие свойства функций

1. Ограниченные функции. Функция $f : X \to Y$ называется *ограниченной*, если множество Y_f является ограниченным множеством. Иными словами функция $f : X \to Y$ ограничена, если существует число M такое, что неравенство $|f(x)| \le M$ выполняется для любого $x \in X$.

Примеры:

1) Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ограничены, так как $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$ для любого x из области определения этих функций.

2) Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{3 + \cos x}$ ограничена, так как

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{3+\cos x}\right| = \frac{|\sin x|}{3+\cos x} \le \frac{1}{3+\cos x} \le \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

для любого x из области определения функции R.

2. Пусть X_1 - подмножество множества определения функции f. Произвольные значения x_1 и x_2 аргумента x, принадлежащие множеству X_1, такие, что $x_1 < x_2$. Если при этих условиях имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция f является *возрастающей* на множестве X_1. Если имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция f является *убывающей* на множестве X_1.

Если в приведенных определениях строгие неравенства между значениями функции сменить на нестрогие, то получим определения *неубывающей* и *невозрастающей* функции на множестве X_1.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве X_1 называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие – *строго монотонными*.

Примеры:

1) Функция $y = \sin x$ с областью определения $X = R$ не является монотонной. Однако на множестве $X_1 = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ она является возрастающей.

2) Функции $y = \log_2 x$, $y = \operatorname{arctg} x$ являются возрастающими на множестве определения.

3. Пусть множество определения функции $f : X \to Y$ есть симметричное относительно точки $x = 0$ множество. Если для любого $x \in X$ верно равенство $f(x) = f(-x)$, то функция называется *четной функцией*, а если для любого $x \in X$ верно равенство, то функция называется *нечетной функцией*.

График четной функции симметричен относительно оси Oy. Начало координат точка O является центром симметрии графика нечетной функции.

Примеры:

1) Функции $y = \cos x$, $y = x^2$, определенные на всей числовой оси, являются четными.

2) Функция $y = \dfrac{x + \sin x}{x^2 - 1}$ является нечетной, так как ее область определения, множество $X = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, симметрично относительно точки $x = 0$ и

$$y(-x) = \frac{-x + \sin(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x - \sin x}{x^2 - 1} = -\frac{x + \sin x}{x^2 - 1} = -y(x).$$

3) Рассмотрим функцию $y = x^3 + 5x^2$ с множеством определения R, являющимся симметричным относительно точки $x = 0$. Вычислим значения функции для симметричных точек -1 и 1:

$$y(-1) = (-1)^3 + 5(-1)^2 = -1 + 5 = 4, \; y(1) = 1^3 + 51^2 = 1 + 5 = 6.$$

Имеем:

$$y(-1) \neq y(1), \; y(-1) \neq -y(1).$$

Поэтому функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция $f : X \to Y$ называется *периодической* на множестве X, если существует такое число $T > 0$, что при любом $x \in X$ число $x + T \in X$ и верно равенство $f(x) = f(x + T)$. Такое число T называется периодом функции.

Следуя определению периодической функции, можно записать равенства

$$f(x) = f(x + T) = f(x + T + T) = f(x + 2T) = f(x + 2T + T) = f(x + 3T) = \ldots = f(x + nT),$$

а так же равенства

$$f(x) = f(x - T + T) = f(x - T) = f(x - 2T + T) = f(x - 2T) = f(x - 3T + T) = \ldots = f(x - nT).$$

Отсюда, если T - период функции, то и число mT при любом целом m, не равном нулю, есть период. Наименьший из положительных периодов называется *основным* периодом.

Примеры:

1) Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ имеют основной период, равный 2π.

2) Рассмотрим функцию $y = 7\cos 5x$ и выясним, является ли она периодической.

Поскольку функция косинус аргумента x с основным периодом 2π, то верны преобразования:

$$7\cos 5x = 7\cos(5x + 2\pi) = 7\cos 5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right).$$

Поскольку преобразования верны при любом x из области определения функции, то по определению данная функция является периодической с периодом $\frac{2\pi}{5}$.