Лекция 12. Числовая последовательность и её предел

Числовая последовательность. Предел последовательности

Функция $f: N \to R$ называется *числовой последовательностью*. Значение $f(n)$ принято обозначать через x_n (или y_n, z_n и с применением других букв латинского алфавита). Множество R_f обычно задают перечислением

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

которое обозначается символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а в более краткой записи – символом $\{x_n\}$. В последовательности число x_1 называется первым членом последовательности, x_2 - вторым членом последовательности, …, x_n - *общим* или *n – м членом последовательности*, число *n* называется *номером* члена последовательности.

Приведем примеры числовых последовательностей.

Примеры:

1) $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$. Эта последовательность – значения функции $f(n) = 2n-1$. Ее можно записать так: $\{2n-1\}$, $x_n = 2n-1$ - общий член последовательности.

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Функция f, отображающая множество N в множество R определяется формулой $f(n) = \frac{1}{n}$, саму последовательность можно записать как $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $x_n = \frac{1}{n}$.

3) $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$. Для этой последовательности $f(n) = 1$, $x_n = 1$.

Имея две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, можно с помощью арифметических операций над общими членами образовывать другие последовательности:

$\{x_n + y_n\}$ - сумма последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$,

$\{x_n - y_n\}$ - разность последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$,

$\{x_n y_n\}$ - произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$,

$\{x_n + y_n\}$ - сумма последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$,

$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ - частное последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le M$ ($x_n \ge M$). Последовательность называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого n выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \le x_{n+1}$). Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей* (*невозрастающей*), если для любого n выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$).

Возрастающую или неубывающую последовательность называют *монотонной последовательностью*. Монотонными последовательностями также называют и убывающие или невозрастающие последовательности.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a, n \to \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a.

Пример. Доказать, исходя из определения, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

По определению число 2 будет пределом последовательности $\{x_n\}$ с $x_n = \frac{2n+1}{n}$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N, такое, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Найдем такое число N.

Последнее неравенство справедливо для всех номеров $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть для всех номеров $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($[x]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x). Если $\varepsilon > 1$, то $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = 0$ и в качестве N возьмем 1, если $\varepsilon \le 1$, то полагаем: $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Из рассмотренного примера видно, что число N зависит от числа ε. Поэтому в определении часто вместо фразы «найдется такое натуральное число N» пишут «найдется такое натуральное число N, зависящее от числа ε» или «найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$».

Приведем геометрическое определение предела последовательности.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(a, \varepsilon)$, которой принадлежат все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Заметим, что вне окрестности $U(a, \varepsilon)$ в этом случае находится лишь конечное число членов последовательности.

Последовательность, имеющая некоторый предел $a \in R$, называется сходящейся.

Рассмотрим свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 1. (единственность предела последовательности)**.** Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Предположим, что $x_n \to a$, $x_n \to b$, $n \to \infty$, и $a \neq b$. В силу свойства $\overline{R}$ найдутся непересекающиеся окрестности $U(a, \varepsilon')$и $U(b, \varepsilon'')$. По определению предела последовательности эти окрестности содержат бесконечное число членов последовательности и вне этих окрестностей находится лишь конечное число членов, что не возможно.

Теорема 2. (ограниченность последовательности). Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $n \to \infty$. Тогда для числа $\varepsilon = 1$ найдется натуральное число N такое, что все элементы x_n последовательности с номерами $N+1$, $N+2$,…, окажутся в окрестности $U(a, 1)$, а конечное число элементов $x_1, \ldots, x_N$ - вне этой окрестности. Найдем

$$d = \max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_N - a|, 1\}$$

Тогда $x_n \in [a - d, a + d]$ для всех номеров n, или $a - d \leq x_n \leq a + d$ для любого n, что означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 3. (переход к пределу в неравенстве)**.** Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$, $n \to \infty$, и верны неравенства $x_n \geq y_n$ начиная с некоторого значения номера n. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n \text{ или } a \geq b.$$

Доказательство. Предположим, что $b > a$. По свойству действительных чисел имеются две непересекающихся окрестностей $U(a, \varepsilon)$ и $U(b, \varepsilon)$ с числом $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. По определению предела последовательности каждая из этих окрестностей содержит бесконечное число элементов, то есть $x_n \in U(a, \varepsilon)$ для всех $n \ge N_1$ и $y_n \in U(b, \varepsilon)$ для всех $n \ge N_2$. При $n \ge \max\{N_1, N_2\}$ имеем

$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2} \text{ и } x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2},$$

Получили, что $y_n < x_n$ для бесконечного множества номеров n. Это противоречит условию теоремы.

Если в условии теоремы вместо нестрогого неравенства было бы строгое неравенство $x_n > y_n$, то все равно можно утверждать, что имеет место нестрогое неравенство $a \ge b$. Например, $x_n = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$, $y_n = 1 - \dfrac{1}{n} \to 1$, $n \to \infty$, но $x_n > y_n$ для всех номеров n.

Теорема 4 (свойство сохранения знака). Пусть $x_n \to a$, $n \to \infty$, причем $a \ne 0$. Тогда найдется такое целое число N, что $|x_n| > \dfrac{|a|}{2}$ для всех $n > N$. Более того, для указанных значений n, если $a > 0$, то $x_n > \dfrac{a}{2}$, если же $a < 0$, то $x_n < \dfrac{a}{2}$.

Доказательство. В силу существования предела для числа $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ найдется целое число N, такое, что неравенство

$$|a - x_n| < \frac{|a|}{2}$$

выполняется для всех $n > N$. Отсюда с учетом свойства модуля действительного числа, второе неравенство (5.1), получаем:

$$|a| - |x_n| \le |a - x_n| < \frac{|a|}{2},\ |a| - |x_n| < \frac{|a|}{2},\ |a| - \frac{|a|}{2} < |x_n|,\ |x_n| > \frac{|a|}{2} \ (n > N).$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Неравенство $|a - x_n| < |a|/2$ равносильно неравенствам

$$-\frac{|a|}{2} < a - x_n < \frac{|a|}{2},\ -\frac{|a|}{2} < x_n - a < \frac{|a|}{2},\ a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}.$$

Если $a > 0$, то из левой части последнего двойного неравенства получаем:

$$x_n > a - \frac{a}{2},\ x_n > \frac{a}{2},$$

а при $a < 0$ из правой части получаем неравенства

$$x_n < a - \frac{a}{2},\ x_n < \frac{a}{2}.$$

Свойство полностью доказано.

Теорема 5. Если $x_n \to a$, $n \to \infty$, то $|x_n| \to |a|$, $n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N, такое, что для всех $n > N$ верно неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Но тогда в силу свойства модуля действительного числа, первое неравенство (5.1), верно неравенство $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$. Поэтому $\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$ для любого $n > N$. Тогда по определению имеем: $|x_n| \to |a|$, $n \to \infty$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

По определению последовательность $\{x_n\}$ является *бесконечно малой последовательностью*, если $x_n \to 0$, $n \to \infty$.

Примеры:

1) Если число q таково, что $|q| < 1$, то $\{q^n\}$ есть бесконечно малая последовательность, так как $q^n \to 0$, $n \to \infty$.

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой последовательностью, так как $\frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$.

Теорема 6. $x_n \to a$, $n \to \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha_n = x_n - a$, $n = 1, 2, \ldots$, является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $n \to \infty$. Тогда по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N, такое, что для всех $n > N$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, то есть неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а это означает, что $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой: $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. По определению предела и с использованием формулы n - го члена последовательности имеем: для любого

$\varepsilon > 0$ существует натуральное N, такое, что для всех $n > N$ верно неравенство $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$. Это означает, что $x_n \to a$, $n \to \infty$. Теорема доказана.

По определению последовательность $\{x_n\}$ является *бесконечно большой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N, такое, что выполняется одно из условий:

1) $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех $n > N$,

2) $x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$ для всех $n > N$,

3) $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех $n > N$.

В соответствие этим случаям пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Геометрически, например, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ означает, что в любой окрестности $U(-\infty, \varepsilon) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ окажутся все элементы бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ начиная с некоторого номера.

Примеры:

1) Последовательность $x_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2) Последовательность $x_n = -n$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3) Последовательность $x_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Приведем утверждения, связывающие бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Теорема 7. Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, $\{y_n\}$ - бесконечно большая последовательность. Тогда последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ является бесконечно малой.

Доказательство. По условию теоремы для любого номера n и некоторого числа M верно неравенство $|x_n| \le M$. Пусть, например, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ по числу $\varepsilon/M > 0$ найдем натуральное число N, такое, что для всех $n > N$ верны неравенства $y_n > \dfrac{M}{\varepsilon}$. Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = \frac{|x_n|}{|y_n|} \le \frac{M}{y_n} < \frac{M}{M/\varepsilon} = \varepsilon$$

для всех $n > N$. По определению последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ является бесконечно малой.

Из этого утверждения получаем следующие следствия.

Следствие. 1) При $x_n = a$, $n = 1, 2, \dots$, и бесконечно большой последовательности $\{y_n\}$ имеем бесконечно малую последовательность $\left\{\dfrac{a}{y_n}\right\}$.

2) При условиях теоремы поскольку $z_n = \dfrac{1}{y_n}$, $n = 1, 2, \dots$, есть бесконечно малая последовательность, то $\{x_n \cdot z_n\}$ есть бесконечно малая последовательность, то есть произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 8. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $|x_n| \ge a > 0$, а $\{y_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ является бесконечно большой.

Последовательность $\{x_n\}$, определенную в условии теоремы называют последовательностью *отделенной от нуля*.

Следствие. 1) При $x_n = a$, $n = 1, 2, \dots$, $a \ne 0$, и бесконечно малой последовательности $\{y_n\}$ имеем бесконечно большую последовательность $\left\{\dfrac{a}{y_n}\right\}$.

2) При условиях теоремы поскольку $z_n = \dfrac{1}{y_n}$, $n = 1, 2, \dots$, есть бесконечно большая последовательность, то $\{x_n \cdot z_n\}$ есть бесконечно большая последовательность, то есть произведение последовательности отделенной от нуля на бесконечно большую последовательность есть бесконечно большая последовательность.

Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Теорема 9. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) Последовательность $\{x_n y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) Последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Доказательство. 1) Пусть $x_n \to a$, $b_n \to a$, $n \to \infty$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ подберем натуральное N так, чтобы для всех номеров $n > N$ выполнялись неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда с использованием первого неравенства (5.1) получаем:

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и утверждение первого пункта доказано.

2) Прежде выполним преобразования:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \le$$

$$\le |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|.$$

Так как $\{y_n\}$ сходится, то она ограничена: $|y_n| \le M$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $K = \max\{M, |a|\}$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ подберем натуральное число N так, чтобы при всех $n > N$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K},\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

С учетом полученных неравенств, для всех $n > N$ имеем:

$$\left|x_n y_n - ab\right| \le K\left|x_n - a\right| + K\left|y_n - b\right| < \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{K\varepsilon}{2K} = \varepsilon .$$

Утверждение второго пункта теоремы доказано.

3) Далее в преобразованиях имеем в виду условие: $b \ne 0$.

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \left|\frac{x_n b - ab + ab - y_n a}{y_n b}\right| = \left|\frac{b(x_n - a) + a(b - y_n)}{y_n b}\right| =$$

$$= \frac{\left|b(x_n - a) + a(b - y_n)\right|}{\left|y_n b\right|} \le \frac{\left|b(x_n - a)\right| + \left|a(y_n - b)\right|}{\left|y_n\right|\left|b\right|} = \frac{\left|b\right|\left|x_n - a\right|}{\left|y_n\right|\left|b\right|} + \frac{\left|a\right|\left|y_n - a\right|}{\left|y_n\right|\left|b\right|} =$$

$$= \frac{\left|x_n - a\right|}{\left|y_n\right|} + \frac{\left|y_n - b\right|\left|a\right|}{\left|y_n\right|\left|b\right|} .$$

По свойству последовательности о сохранения знака, теорема 5.10, найдется натуральное N_1, такое, что для любого $n > N_1$ имеет место неравенство

$$\left|y_n\right| > \frac{\left|b\right|}{2} .$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Для ε найдем натуральное число N_2 такое, что для любого числа $n > N_2$ выполняется неравенство

$$\left|x_n - a\right| < \frac{\varepsilon\left|b\right|}{4} ,$$

а также подберем натуральное N_3, такое, что для любого $n > N_3$ выполняется неравенство

$$\left|a\right|\left|y_n - b\right| < \frac{\varepsilon b^2}{4} .$$

Положим: $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. С использованием полученных неравенств выполним преобразования:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon\left|b\right|/4}{\left|b\right|/2} + \frac{\varepsilon\left|b\right|^2/4}{\left|b\right|^2/2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Неравенство

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$$

верно для любого $n > N$. Доказано третье утверждение теоремы.

Следствие. 1) Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то последовательности $\{x_n + y_n\}$ и $\{x_n y_n\}$ также бесконечно малые, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n=0+0=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

2) При $x_n=C$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}(Cy_n)=\lim\limits_{n\to\infty}C\lim\limits_{n\to\infty}y_n=C\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, то есть постоянную величину можно выносить за знак предела.

Зная лишь только то, что $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, $n\to\infty$, о пределе последовательности $\{x_n/y_n\}$ ни чего определенного сказать нельзя. Действительно,

если $x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{n^2}\to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n}=n\to+\infty$, $n\to\infty$;

если $x_n=\dfrac{1}{n^2}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{n}\to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{1}{n}\to 0$ $n\to\infty$;

если $x_n=\dfrac{a}{n}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{n}\to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n}=a\to a$ $n\to\infty$;

если $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{n}\to 0$, $n\to\infty$, то $\dfrac{x_n}{y_n}=(-1)^n$, а эта последовательность не имеет предела.

Говорят, что выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Если $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$, $n\to\infty$, то выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. В случае выражения $x_n y_n$ при $x_n\to 0$ и $y_n\to\infty$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$, а в случае x_n+y_n при $x_n\to+\infty$ и $y_n\to-\infty$ - неопределенность вида $\infty-\infty$.

Для нахождения предела выражений нужно знать дополнительные сведения о характере изменения переменных x_n и y_n. Для нахождения предела в каждом конкретном случае необходимо выполнить специальные преобразования выражений представляющих неопределенности. Вычислить предел – это значить раскрыть неопределенность.

Примеры:

1) Найдем предел последовательности $x_n = \dfrac{9n^2+4}{3n^2+n+2}$, выражение которой

представляет собой неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, поскольку $9n^2+4 \to +\infty$,

$3n^2+n+4 \to +\infty$, $n \to \infty$. Выполняя преобразования, найдем предел.

2) Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4}{3n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(9+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{4}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{9}{3} = 3.$$

3) Выражение под знаком предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+3}.$$

представляет неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроим эту неопределенность.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(2+\frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^3}} = 0\cdot\frac{1}{2}.$$

4) Найти предел последовательности.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right).$$

Последовательность $\{n\}$ является бесконечно большой, а последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\Big/\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ отделена от нуля поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Поэтому

исходная последовательность будет бесконечно большой,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{3n^2+n+1} = +\infty.$$

5) Выражение под знаком предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)$ представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty$, поскольку $n\to+\infty$ и $\sqrt{n^2-1}\to+\infty$. Раскроим неопределенность следующими преобразованиями:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+1}{n+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=0.$$

Некоторые признаки существования предела последовательности. Число *e*, натуральные логарифмы

Приведем достаточные признаки существования предела последовательности. В них с использованием определенных свойств последовательностей устанавливается существование предела самой последовательности.

Теорема 10. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, а последовательность $\{x_n\}$ такова, что $y_n\le x_n\le z_n$, $n=1,2,\ldots$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ произвольное число. В силу существования пределов найдутся натуральные n_1 и n_2, такие, что

$$y_n\in U(a,\varepsilon) \text{ для всех } n\ge n_1$$

и

$$z_n\in U(a,\varepsilon) \text{ для всех } n\ge n_2.$$

Если $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, то оба включения

$$y_n,\, z_n\in U(a,\varepsilon)$$

имеют место для всех $n\ge n_0$. Тогда верно включение

$$[y_n,\, z_n]\subset U(a,\varepsilon)$$

каково бы ни было $n\ge n_0$. В силу свойства последовательности $\{x_n\}$ для всех $n\ge n_0$ будет $x_n\in U(a,\varepsilon)$, а это означает, что $\{x_n\}$ последовательность сходится и ее предел равен a.

Теорема 11 (Вейерштрасс). Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу), то она сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

где $a = \sup X$ ($a = \inf X$), а $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Доказательство. Пусть последовательность не убывает и ограничена сверху. Множество X, ограниченное сверху, обладает точной верхней гранью $a = \sup X$ по теореме 5.1. По определению точной верхней грани для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральной число N, такое, что верны неравенства

$$a - \varepsilon < x_N \le a.$$

В силу не убывания последовательности $x_N \le x_{N+1} \le x_{N+2} \le ...$ и, следовательно, для любого номера $n \ge N$ выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < x_n \le a$$

или неравенства

$$a - \varepsilon < x_n \le a + \varepsilon, \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает, последовательность сходится и ее предел равен числу a.

Аналогично доказывается сходимость, находится предел не возрастающей и ограниченной снизу последовательности. Теорема доказана.

С применением теоремы Вейерштрасса устанавливается существование придела последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, ...$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху.

Применим формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальные коэффициенты. Полагая $a = 1, b = \dfrac{1}{n}$, получаем:

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + ... +$$

$$+ \frac{n(n-1)...1}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... +$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

При переходе от n к $n+1$ в сумме (2) число слагаемых, которые все положительны, возрастает и, кроме того, каждое слагаемое, начиная с третьего увеличивается, так как

$$1-\frac{s}{n}<1-\frac{s}{n+1},\ s=1, 2, \ldots, n-1,\ n=1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$x_n < x_{n+1},\ n=1, 2, \ldots,$$

то есть последовательность возрастает.

В каждом слагаемом (2) множитель вида $\left(1-\frac{s}{n}\right)$ меньше единицы и $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ для всех $n=1, 2, \ldots$. Поэтому справедливы оценки:

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Применим формулу для вычисления суммы первых членов геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$x_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}=2+1-\frac{1}{2^{n-1}}<2+1=3.$$

Итак, последовательность ограничена сверху: $x_n<3$, $n=1, 2, \ldots$. Заметим, последовательность ограничена, так как

$$2\le x_n<3,\ n=1, 2, \ldots . \qquad (3)$$

Согласно теореме Вейерштрасса существует предел последовательности. Этот предел обозначается буквой *e*, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Если в неравенстве (3) перейти к пределу, то получим $2<e\le 3$. Число *e* иррациональное число и с точностью до 10^{-15}

$$e=2{,}718281828459045.$$

Число *e* является основанием логарифма, называемого натуральным логарифмом:

$$\log_e b = \ln b.$$

Подпоследовательности.

Критерий Коши сходимости последовательности

Принципиальное значение в теории пределов числовых последовательностей имеет критерий Коши сходимости последовательности. Здесь приведем необходимые определения, а вспомогательные утверждения и сам критерий приведем, не приводя его доказательства.

Пусть задана произвольная последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел:

$$\{x_1, x_2, x_3, ...\}.$$

Из нее можно выделить бесконечным числом способом новую последовательность $\{x_{n_k}\}$, где индекс n_k пробегает возрастающую бесконечную последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$. В подпоследовательности роль номера члена подпоследовательности, принимающего все натуральные значения играет k, n_k является переменной, принимающей натуральные значения и n_k стремится к элементу $+\infty$ при неограниченном возрастании k, $n_k \geq k$.

Пример. Для последовательности $1, 2, 3, ..., n, ...$ подпоследовательностью будет последовательность $1, 3, 5, ..., 2n-1, \ldots$.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится на расширенном множестве действительных чисел к пределу a, то и любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к a.

Докажем это утверждение для конечного a. По определению предела для любой окрестности $U(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, найдется натуральное N, такое, что все элементы x_n с номерами $n > N$ будут принадлежать $U(a, \varepsilon)$. Поскольку $n_k \to +\infty$, то найдется натуральное K, что при $k > K$ будет верно неравенство $n_k > N$. Но тогда $x_{n_k} \in U(a, \varepsilon)$ для всех $k > K$, а это означает, что число a является пределом последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Утверждение, обратное доказанному утверждению, не всегда имеет место.

Действительно, из последовательности $x_n = (-1)^n$ можно выделить подпоследовательностью $x_{n_k} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, очевидно, имеющий предел, равный 1. Однако сама последовательность не имеет предела.

Справедливо утверждение, имеющее большое применение в математическом анализе.

Теорема 12 (Больцано – Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной последовательности – бесконечно большую подпоследовательность, имеющую своим пределом бесконечность определенного знака.

В определение сходящейся последовательности входит значение предела, которое может быть неизвестным. Критерий Коши сходимости последовательности использует только свойство членов последовательности. Сформулируем такое свойство.

По определению последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для всех номеров $n > N$ и $m > N$ справедливо неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon .$$

Последнее условие можно сформулировать и так: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для всех номеров $n > N$ и всех целых неотрицательных p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются также *фундаментальными последовательностями*.

Теорема 13 (критерий Коши). Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши (была фундаментальной).

Пример. Применим критерий Коши для доказательства существования предела последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть n - произвольное натуральное число, а p - также произвольное и неотрицательное целое число. Составим и преобразуем разность:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}.$$

Теперь оценим сверху последнюю сумму.

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\le\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$\frac{n+1-n}{n(n+1)}+\frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{n+p-(n+p-1)}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

Итак, получили неравенство

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|<\frac{1}{n},$$

которое имеет место при любом p.

Пусть число ε произвольно положительное число. Положим: $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Это неравенство будет выполняться и при любом $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Если $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, то при $n>N$ имеет место неравенство

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$$

для всех целых неотрицательных p и $n>N$. Тогда исследуемая последовательность является фундаментальной и имеет предел в силу критерия Коши.