Лекция 13. Предел функции в точке. Бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке

Предел функции в точке. Эквивалентные определения

По определению точка $x_0 \in \overline{R}$ является *предельной* точкой для множества $X \subset \overline{R}$, если найдется хотя бы одна точка $x \in X$, принадлежащая $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ при любом $\delta > 0$.

Примеры:

1) Пусть $X = R \setminus \{0\}$. Тогда $x_0 = 0$ есть предельная точка для множества X, так как при любом $\delta > 0$ верно $\overset{\circ}{U}(0, \delta) \cap X \neq \varnothing$.

Заметим, что «точки» $-\infty$, $+\infty$, ∞ также будут предельными точками множества X.

2) Для отрезка $X = [a, b)$ предельными точками будут a, b. Все внутренние точки отрезка являются предельными точками.

Далее, если некоторая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \not\subset X$, то все же для краткости множество $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \cap X$ будем называть окрестностью.

Пусть $f : X \to Y$, x_0 - предельная точка множества X. По определению число a есть *предел функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для каждого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ верно неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Заметим, что число δ зависит от числа ε и самой предельной точки x_0. Поэтому часто пишут $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

Определение предела предполагает, что функция может быть и неопределенной в точке x_0. Поэтому выражение *предел функции в точке* x_0 часто заменяют выражением *предел функции при* x*, стремящимся к точке* x_0, или – выражениям *предел функции при* $x \to x_0$.

То, что число a является пределом обозначается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, или пишут $f(x) \to a$, $x \to x_0$.

Данное определение не исключает и случаев $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$, $x_0 = \infty$, лишь бы функция была определена в соответствующих окрестностях $U(-\infty, \delta)$, $U(+\infty, \delta)$ и $U(\infty, \delta)$. Тогда, к примеру, в соответствии второму случаю пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ или $f(x) \to a$, $x \to x_0$.

Содержательно существование предела a говорит о том, что если x приближается к точке x_0 по любому закону, оставаясь не равным x_0, то соответствующее значение $f(x)$ в свою очередь приближается к a, то есть делается как угодно близким к a.

Геометрически $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, что часть $\Gamma = \left\{ (x, y) \mid x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \cap X \right\}$ графика функции $f : X \to Y$ будет принадлежать полосе $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$, $x \in R$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие приведенные понятия.

Примеры:

1) Доказать исходя из определения, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. В данном случае область определения функции $X = R$, $x_0 = 2$ - предельная точка.

Для удобства рассматриваем интервал $(1; 3)$. Пусть ε - произвольное положительное число. Для числа ε необходимо найти окрестность $\overset{\circ}{U}(2, \delta) = \{x \mid 0 < |x - 2| < \delta\}$ (то есть число δ), такую, что неравенство

$$\left| x^2 - 4 \right| < \varepsilon$$

выполняется для каждого $x \in \overset{\circ}{U}(2, \delta)$. Для точек интервала $(1; 3)$ справедливо неравенство

$$\left| x^2 - 4 \right| = |x + 2||x - 2| < 5|x - 2|.$$

Положим: $5|x - 2| < \varepsilon$. Отсюда $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Выполнение последнего неравенства повлечет выполнение неравенства $\left| x^2 - 4 \right| < \varepsilon$.

Пусть $\frac{\varepsilon}{5} \geq 1$ или $\varepsilon \geq 5$. Положим: $\delta = 1$. Тогда для любого $x \in \overset{\circ}{U}(2,1)$ верно двойное неравенство $1 < x^2 < 9$, которое влечет неравенства $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$, так как $4 - \varepsilon < 1$ и $4 + \varepsilon \geq 9$. Отсюда

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon, \ \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon.$$

Пусть $0 < \frac{\varepsilon}{5} < 1$ или $0 < \varepsilon < 5$. Положим: $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Тогда из неравенства $|x - 2| < \delta$ или принадлежности $x \in \overset{\circ}{U}(2, \delta)$ будет следовать неравенство $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\delta = \begin{cases} 1, \varepsilon \geq 5, \\ \frac{\varepsilon}{5}, 0 < \varepsilon < 5 \end{cases},$$

такое, что неравенство $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$ выполняется для любого $x \in \overset{\circ}{U}(2, \delta)$. По определению $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

2) Докажем, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Пусть $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Область определения - $X = R \setminus \{-1\}$.

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{x+1}\right| = \frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{|x-(-1)|} \leq \frac{1}{\left||x| - 1\right|}.$$

Последнее неравенство получено с использованием второго неравенства (5.1) при $a = x$ и $b = -1$. Можно считать что $|x| > 1$. Тогда $\left||x| - 1\right| = |x| - 1$. Имеем неравенство

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x| - 1}.$$

Пусть число ε произвольное и положительное. Неравенство $\frac{1}{|x| - 1} < \varepsilon$ равносильно неравенству $|x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ или неравенству $|x| > \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Пусть $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Отсюда $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. При таком выборе δ из неравенства $|x| > \delta$ или принадлежности произвольного x окрестности $U(\infty, \delta)$ будет следовать неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Тогда по определению $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

Данное выше определение предела функции в точке есть определение предела по Коши. Приведем другое определение предела в терминах пределов последовательностей, определение по Гейне.

Пусть $f : X \to Y$, x_0 - предельная точка множества X. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен a, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$ принадлежащая некоторой проколотой окрестности точки x_0 и сходящаяся к точке x_0.

Определения предела в точке по Коши и по Гейне эквивалентны. Действительно, пусть функция $f(x) \to a$ в смысле определения по Коши и пусть задана последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к числу x_0, причем $x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ и имеет место неравенство
$|f(x) - a| < \varepsilon$. Вне окрестности находится конечное число элементов последовательности. Поэтому можно найти такой номер N, что для всех $n \geq N$ будет иметь место включение $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, а, следовательно, выполняться неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$ или $f(x_n) \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$. Это означает стремление $\{f(x_n)\}$ к числу a. В силу произвольности $\{x_n\}$ функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 в смысле определения по Гейне.

Обратно, предположим, что функция $f(x)$ имеет предел в смысле второго определения. Предположим противное доказываемому: функция не имеет предела в смысле определения предела по Коши. Это означает, что существует число ε_0, для которого нельзя подобрать нужное число δ или окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, то есть в любой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ найдется точка $x^{(\delta)}$, для которой $\left|f\left(x^{(\delta)}\right) - a\right| \geq \varepsilon_0$. В таком случае образуем последовательность $\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, значений δ и для k - го элемента этой последовательности найдем $x^{(k)} \neq x_0$, для которого $x^{(k)} \in \overset{\circ}{U}\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$ и $\left|f\left(x^k\right) - a\right| \geq \varepsilon_0$. Ясно, что последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$ стремится к x_0, последовательность значений функции $\left\{f\left(x^{(k)}\right)\right\}$ заведомо не стремится к числу a.

Получили противоречие с тем, что функция $f(x)$ имеет предел в смысле определения по Гейне. Эквивалентность определений полностью доказана.

Часто в доказательстве отсутствия предела функции в точке используют определение предела по Гейне.

Пример. Доказать, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0=0$.

Рассмотрим две последовательности $x'_n=\frac{1}{\pi n}$ и $x''_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n=1, 2, \dots$, сходящиеся к точке $x_0=0$. Однако

$$f(x'_n)=\sin\frac{1}{x'_n}=\sin\pi n=0 \text{ и } f(x''_n)=\sin\frac{1}{x''_n}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1, \ n=1, 2, \dots .$$

Получили, что последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ имеют различные пределы, следовательно, данная функция не имеет предела в точке $x_0=0$.

В исследовании функций приходится рассматривать односторонние пределы.

По определению интервал $U^-(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0)$ есть левая δ*- окрестность* точки x_0, интервал $U^+(x_0, \delta)=(x_0, x_0+\delta)$ - *правая* δ*- окрестность* точки x_0. Если $x\to x_0$ и $x\in U^-(x_0, \delta)$, то пишут $x\to x_0-0$, а $x\to x_0+0$ - при $x\to x_0$, $x\in U^+(x_0, \delta)$.

Число a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева*, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется положительное число $\delta=\delta(x_0, \varepsilon)$ такое, что для всех $x\in U^-(x_0, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. Если же для любого числа $\varepsilon>0$ найдется положительное число $\delta=\delta(x_0, \varepsilon)$ такое, что для всех $x\in U^+(x_0, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$, то a - предел функции $f(x)$ *справа*.

Применяют обозначения $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$ и $f(x_0-0)=a$ для предела функции слева, а $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a$ и $f(x_0+0)=a$ - для предела функции справа.

Пример. В случае функции $y=\operatorname{sign}x$ по определению этой функции имеем $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign}x=-1$, а $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign}x=1$ (см. рисунок 1).

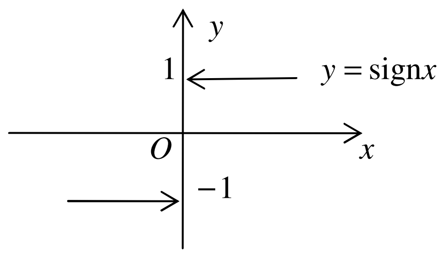

Рисунок 1

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a .$$

К примеру, функция $y = \mathrm{sign} x$ не имеет предел при $x \to 0$, а функция $y = |\mathrm{sign} x|$ имеет предел, равный 1.

Свойства функций, имеющих предел в точке

Установим некоторые важные свойства функций, которые имеют пределы в точке.

Теорема 1 (единственность предела). Функция может иметь только один предел в точке.

Доказательство. Пусть имеется функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$. Предположим противное утверждение: $f(x) \to a$ и $f(x) \to b$ при $x \to x_0$, причем $a \neq b$.

В силу определения предела по Гейне для последовательности $\{x_n\}$, сходящейся точке x_0 и такой, что $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствующая сходящаяся последовательность $\{f(x_n)\}$ будет иметь два различных предела a и b, что невозможно. Полученное противоречие означает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2 (ограниченность функции). Пусть $f(x) \to a$, $x \to x_0$. Тогда существует окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, на которой функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство. В силу существования предела для $\varepsilon = 1$ найдется положительное число δ, такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ верно неравенство $|f(x) - a| < 1$. С применением неравенства с модулем имеем:

$$|f(x)|-a<|f(x)-a|<1,\ |f(x)|<1+|a|,\ -(1+|a|)<f(x)<(1+|a|).$$

Последнее неравенство выполняется для любого $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ и означает ограниченность на множестве $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$.

Теорема 3 (переход к пределу в неравенстве). Пусть $f(x)\to a$, $g(x)\to b$, $x\to x_0$, и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x)\le g(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

или неравенство $a\le b$.

Теорема 4 (сохранение знака). Пусть $f(x)\to a$, $x\to x_0$, причем $a\ne 0$. Тогда существует окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, такая, что для любого $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ имеет место неравенство

$$|f(x)|>\frac{|a|}{2}.$$

Более того, для всех x из указанной окрестности при $a>0$ верно $f(x)>\frac{a}{2}$, а при $a<0$ - неравенство $f(x)<\frac{a}{2}$.

Доказательство. В силу существования предела для $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$ найдется окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ такая, что

$$|a-f(x)|<\frac{|a|}{2}.$$

Отсюда с и пользованием неравенства с модулем получим неравенства:

$$\frac{|a|}{2}>|a|-|f(x)|,\ |f(x)|>|a|-\frac{|a|}{2},\ |f(x)|>\frac{|a|}{2}.$$

Первое из неравенств доказано. Для доказательства остальных неравенств запишем:

$$|f(x)-a|<\frac{|a|}{2}.$$

Тогда

$$-\frac{|a|}{2}<f(x)-a<\frac{|a|}{2},\ a-\frac{|a|}{2}<f(x)<\frac{|a|}{2}+a.$$

При $a>0$ из левого неравенства последнего двойного неравенства следует

$$f(x)>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2},$$

а при $a<0$ из правой части двойного неравенства следует

$$f(x)<-\frac{a}{2}+a=\frac{a}{2},$$

что и требовалось доказать.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке

Если $f(x)\to 0$, $x\to x_0$, то по определению функция $f(x)$ является *бесконечно малой при* $x\to x_0$.

Примеры:

1) Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x\to\pm\infty$, $x\to\infty$.

2) Функция $f(x)=|x-x_0|$ - бесконечно малая при $x\to x_0$.

Теорема 5. Функция $f(x)$ имеет предел, равный числу a, при x стремящимся к x_0 тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)=f(x)-a$ является бесконечно малой при x стремящимся к x_0.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+1}$.

Пусть $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$. Преобразуем выражение функции $f(x)$:

$$\frac{2x^2+3}{x^2+1}=\frac{2x^2+2+1}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)+1}{x^2+1}=2+\frac{1}{x^2+1}.$$

Тогда $\frac{1}{x^2+1}=f(x)-2$. Поскольку $\frac{1}{x^2+1}\to 0$, $x\to\infty$, то по теореме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+1}=2.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ такая, что имеет место одно из условий

1) $f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$ для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$,

2) $f(x) < -\dfrac{1}{\varepsilon}$ для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$,

3) $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$.

Если выполняется первое условие, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, а если второе - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, если третье - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Примеры:

1) Функция $y = -\ln|x|$ с областью определения $X = R \setminus \{0\}$ (см. рисунок 2) является бесконечно большой при $x \to 0$, то есть

$$\lim_{x \to 0} \left(-\ln|x|\right) = +\infty.$$

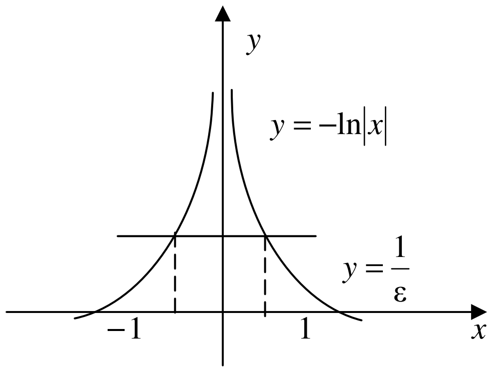

Рисунок 2

Действительно, пусть ε - произвольное положительное число. Найдем окрестность $\overset{\circ}{U}(0, \delta)$ такую, что для каждой точки этой окрестности выполнялось неравенство $-\ln|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. С учетом области определения функции имеем:

$$\ln|x|^{-1} > \ln e^{\frac{1}{\varepsilon}},\ |x|^{-1} > e^{\frac{1}{\varepsilon}}.\ \frac{1}{|x|} > e^{\frac{1}{\varepsilon}},\ |x| < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Если положить $\delta = e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, то $\overset{\circ}{U}(0, \delta) = \{x \mid |x| < \delta,\ x \neq 0\}$ - искомая окрестность, поскольку из условия $x \in \overset{\circ}{U}(0, \delta)$ в силу равносильности полученных неравенств верно неравенство $-\ln|x| > \frac{1}{\varepsilon}$.

2) Показать, что $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$. Согласно определению составим неравенство

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

в котором ε - произвольное положительное число. Это неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < |x-1| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \varepsilon$. Получаем, для любого $x \in \overset{\circ}{U}(1, \delta) = \{x \mid 0 < |x-1| < \delta\}$ верно неравенство $\left|\frac{1}{x-1}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Приведем некоторые свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, а функция $g(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Следствия.

1) Если $f(x) = C$, где C - постоянная величина, а функция $g(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\frac{C}{g(x)}$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$.

2) Если выполняются условия теоремы, то $z(x) = \frac{1}{g(x)}$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$. Тогда $f(x)z(x)$ - также бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

Теорема 7. Пусть функция $f(x)$ такова, что выполняется неравенство $|f(x)| \geq C > 0$ для каждой точки x некоторой окрестности точки x_0; функция $g(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

Следствия.

1) При $f(x)=C\neq 0$, C - постоянная, функция $\dfrac{C}{g(x)}$ есть бесконечно большая функция при $x\to x_0$, если функция $g(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$.

2) Если функция $g(x)$ бесконечно малой при $x\to x_0$, то $z(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ бесконечно большая функция при $x\to x_0$. Если $f(x)\to C\neq 0$, $x\to x_0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ является бесконечно большой при $x\to x_0$.

Действия над функциями, имеющими предел в точке

Теорема 8. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x\to x_0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Функция $f(x)+g(x)$ имеет предел при $x\to x_0$ и верно равенство

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x).$$

2) Функция $f(x)g(x)$ имеет предел при $x\to x_0$ и верно равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x).$$

3) Если предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет предел при $x\to x_0$ и верно равенство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Доказательства утверждений теоремы можно выполнить на основе определения предела функции по Гейне. Приведем только лишь доказательство второго пункта.

Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке x_0, с элементами, не равными x_0, и принадлежащая областям определения функций. В силу условия теоремы и по определению предела по Гейне существуют пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$. По теореме 5.15 об арифметических действиях над сходящимися последовательностями существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n)$. Этот предел равен $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Поскольку $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, то по определению предела по Гейне существует предел при $x \to x_0$ функции $f(x)g(x)$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Следствия.

1) В силу первого утверждения сумма бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

2) В силу второго утверждения произведение бесконечно малых функций в точке есть бесконечно малая функция. При $f(x)=C$, C - постоянная величина, справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} Cg(x)=C\lim_{x\to x_0} g(x),$$

то есть постоянную величину можно выносить за знак предела. При любом натуральном числе k верно

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^k = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^k .$$

Приведем в дополнение к арифметическим действиям над функциями, имеющими предел в точки, утверждение о пределе композиции функций.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=a$, где a – есть $-\infty$ или $+\infty$, или ∞, то будем считать, что у функции $f(x)$ в точке x_0 имеется бесконечный предел.

Теорема 9. Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ($Y_f = Y$), существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=z_0$. Тогда при $x \to x_0$ существует конечный или бесконечный предел композиции $g \circ f(x) \equiv g(f(x))$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{y\to y_0} g(y).$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке x_0, с элементами, не равными x_0, и принадлежащая области определения функции $f(x)$.

Поскольку $f(x) \to y_0$, $x \to x_0$, то по определению предела по Гейне имеем: $y_n = f(x_n) \to y_0$, $n \to \infty$, $y_n \in Y$. Так как $g(y) \to z_0$, $y \to y_0$, то в силу того же определения $g(y_n) \to z_0$, $n \to \infty$. Получили, что для последовательности $\{x_n\}$, обладающей выше определенными свойствами, справедливо $g(f(x_n)) \to z_0$, $n \to \infty$. А это означает, что функция $g(f(x))$ имеет предел $z_0 = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ при $x \to x_0$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Теорема доказана.

Последнее равенство часто называют формулой замены переменной в пределе.

Некоторые признаки существования предела функции в точке. Критерий Коши

Теорема 10 (о промежуточной функции). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = a$. Функция $f(x)$ такова, что в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ имеет место двойное неравенство $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$. Тогда функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке x_0, с элементами, не равными x_0, и принадлежащая окрестности U точки x_0. В сиу условия теоремы имеем неравенства

$$\varphi(x_n) \le f(x_n) \le \psi(x_n).$$

Поскольку $\{\varphi(x_n)\}$ и $\{\psi(x_n)\}$ сходятся, то для любого числа $\delta > 0$ найдется натуральное число N такое, все элементы этих последовательностей с номерами $n > N$ окажутся в δ - окрестности точки a. В силу приведенного двойного неравенства этой окрестности будут принадлежать все элементы последовательности $\{f(x_n)\}$. По определению последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Использую свойство сходящихся последовательностей, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)\le \lim_{n\to\infty}f(x_n)\le \lim_{n\to\infty}\psi(x_n),\ a\le \lim_{n\to\infty}f(x_n)\le a,$$

или $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

Точной верхней гранью $\sup\limits_{x\in X}f(x)$ *функции* $f(x)$ *на множестве* X называется число $\sup\{f(x)\mid x\in X\}$. Аналогично $\inf\limits_{x\in X}f(x)=\inf\{f(x)\mid x\in X\}$ - *точная нижняя грань функции* $f(x)$ *на множестве* X.

Теорема 11. Пусть функция $f(x)$ не убывает на множестве X, $\alpha=\inf X$, $\beta=\sup X$. Если функция $f(x)$ ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\beta-0}f(x)=b$, причем $b=\sup\limits_{x\in X}f(x)$. Если функция $f(x)$ ограничена снизу, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\alpha+0}f(x)=a$, причем $a=\inf\limits_{x\in X}f(x)$.

Приведем утверждение о необходимом и достаточном условиях существования предела.

Теорема 12 (**критерий Коши**). Для того чтобы функция $f(x)$, $x\in X$, имела в точке x_0 конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ такая, что для любых $x'\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X$ и $x''\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X$ выполнялось неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость условия теоремы. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.Тогда по определению для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$, что для каждого $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $x',x''\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X$, то

$$|f(x'')-f(x')|=|f(x'')-a+a-f(x')|\le|f(x'')-a|+|f(x')-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Докажем достаточность условий. Покажем, что при выполнении условий теоремы существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. Для произвольного и фиксированного числа

$\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$, что для всех $x', x'' \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к точке x_0 и такая, что $x_n \in X$ для любого номера *n*. В силу определения предела последовательности найдется натуральное число N такое, что для всех $n > N$ верно $x_n \in U(x_0)$. Так как $x_n \in X$, то $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$, $n > N$. Для всех номеров $n > N$ и $m > N$ имеем $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ и $x_m \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$. В силу условия теоремы выполняется неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию Коши последовательностей и, следовательно, имеет конечный предел. Поскольку $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к точке x_0 и такая, что $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то по определению предела функции по Гейне функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0.