Лекция 14. Непрерывность функции в точке. «Замечательные пределы». Сравнение бесконечно малых функций

Непрерывность функции в точке

По определению функция $f : X \to Y$ *непрерывна в точке* $x_0 \in R$, если она определена в некоторой полной окрестности $U(x_0)$ ($x_0 \in U(x_0)$) и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Приведем эквивалентные определения непрерывной в точке функции.

1) Функция $f : X \to Y$ называется непрерывной в точке $x_0 \in R$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) По определению $\Delta x = x - x_0$ есть *приращение аргумента* x, а величина

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

есть *приращение функции в точке* x_0. Для приращения функции также применяют обозначения $\Delta y(x_0)$, $\Delta y(x_0, \Delta x)$, $\Delta f(x_0)$, $\Delta f(x_0, \Delta x)$.

Функция $f : X \to Y$ называется непрерывной в точке $x_0 \in R$, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Примеры:

1) Функция $f(x) = C$, C - постоянная величины, непрерывна, так как $\Delta y = 0$.

2) Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке x, так как $\Delta y = \Delta x \to 0$.

3) Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке x, так как

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + x^2 - x^2 = 2x\Delta x$$

и, следовательно, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

4) Докажем непрерывность функции $y = \cos x$ в любой точке x. Прежде установим неравенство $|\sin x| \le |x|$ для любого $x \in R$. Пусть $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$. Тогда (см. рисунок 1)

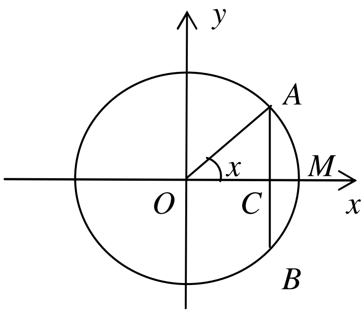

Рисунок 1

$$0<\sin x=\frac{AC}{OA}=\frac{\frac{1}{2}AB}{1}=\frac{1}{2}AB<\frac{1}{2}\cup AMB\,.$$

Радианная мера $\cup AMB$ равна $2x$. Отсюда $0<\sin x<x$. Если $-\frac{\pi}{2}\le x<0$, то $0<-x\le\frac{\pi}{2}$ и $|\sin x|=|-\sin(-x)|=|\sin(-x)|<|-x|=|x|$ по доказанному ранее. При $x=0$ имеем $|\sin x|=|x|$. При $|x|>\frac{\pi}{2}$ (>1) $|\sin x|\le 1<\frac{\pi}{2}<|x|$. Неравенство доказано.

Теперь с использованием доказанного неравенства проведем оценку:

$$|\Delta y|=|\cos(x+\Delta x)-\cos x|=2\left|\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\right|=2\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right|=$$

$$=2\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le 2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|.$$

Поэтому в силу полученного неравенства $|\Delta y|\le|\Delta x|$ при $\Delta x\to 0$ также $|\Delta y|\to 0$.

5) Без доказательства укажем что функции $y=\sin x$, $y=a^x$, $a>0$, $a\ne 1$, непрерывны в каждой точке своей области определения.

Если использовать определения односторонних пределов функции, то можно определить левостороннюю и правостороннюю непрерывность функции в точке. По определению функция $f(x)$ *непрерывна слева в точке* x_0, если $f(x_0-0)=f(x_0)$, *непрерывна справа в точке* x_0, если $f(x_0+0)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$f(x_0-0)=f(x_0-0)=f(x_0).$$

Примеры:

1) Функция

$$f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le 0,\\ x,\ x>0\end{cases}$$

Непрерывна во всех точках, кроме точки $x=0$. В точке $x=0$ является непрерывной слева, так как $f(0)=1$ и $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\cos x=1$.

2) Ранее символом $[x]$ обозначали наибольшее целое число, не превосходящее числа x. Рассмотрим функцию $y=[x]$. Областью определения этой функции является множество действительных чисел R, а множеством значений – множество целых чисел Z.

По определению этой функции, если $n\le x<n+1$, то $[x]=n$ для любого $n\in Z$. Поскольку $f(n)=n$ и $f(n+0)=\lim\limits_{x\to n+0}[x]=n$, функция $y=[x]$ непрерывна справа.

Свойства функций, непрерывных в точке. Действия над непрерывными в точке функциями. Непрерывность обратной функции.

Из свойств функций, имеющих предел в точке, и определения непрерывности в точке следуют следующие утверждения, описывающие свойства непрерывных в точке функций. Доказательства утверждений не приводим, так как они полностью повторяют доказательства теорем о свойствах функций имеющих предел в точке.

Теорема 1 (ограниченность функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то найдется окрестность $U(x_0)$, в которой функция $f(x)$ ограничена: $A\le f(x)\le B$ для всех $x\in U(x_0)$ и некоторых A и B.

Теорема 2 (сохранение знака непрерывной функцией). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\ne 0$. Тогда найдется окрестность $U(x_0)$ такая, что для любого $x\in U(x_0)$ верно неравенство $|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}$ и, боле того, если $f(x_0)>0$, то $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$, а если $f(x_0)<0$, то $f(x)<\frac{f(x_0)}{2}$.

Рассмотрим арифметические действия над непрерывными в точке функциями.

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда непрерывными в точке x_0 являются функции $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, а при дополнительном условии $g(x_0)\ne 0$ и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$

Следствия.

1) Так как в каждой точке непрерывны функции $y = C$, $y = x$, то непрерывной в любой точке будет функция $y = ax + b$, где $a, b \in R$.

2) Так как функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны в любой точке, то функции $y = \mathrm{tg} x$ и $y = \mathrm{ctg} x$ непрерывны в каждой точке области определения.

3) Так как функции $y = x$ и $y = x^2$ непрерывны в любой точке, то функция $y = x^n$, $n \in N$, непрерывна в каждой точке.

Рассмотрим теперь композицию непрерывных функций.

Теорема 4. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ($Y_f = Y$). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f(x) \equiv g(f(x))$ (сложная функция) непрерывна в точке x_0.

Доказывается теорема также, что и теорема о существовании предела композиции в точке. Там же приведена формула

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Теперь предположим, что функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$, а функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right).$$

Это равенство означает возможность перехода к пределу под знаком непрерывной функции.

Непрерывность в точке обратной функции $f^{-1}(y)$ устанавливается в следующей теореме. Будем считать, что взаимно однозначность функции $f(x)$ определяется ее строгой монотонностью, причем для определенности полагаем, что функция строго возрастает на множестве своего задания. Рассматриваем непрерывность функции $f(x)$ во внутренней точке, обладающей окрестностью полностью принадлежащей области определения функции.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X, а множество Y есть совокупность всех ее значений. Функция является строго возрастающей. Пусть во внутренней точке x_0 области определения функция $y = f(x)$ непрерывна. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.

Следствия.

1) Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$ непрерывны в каждой точке своей области определения, так как непрерывны в каждой точке своей области определения тригонометрические функции.

2) Функция $y = \log_a x$ непрерывна в каждой точке области определения, так как функция $y = a^x$ непрерывна в каждой точке области определения (принято без доказательства).

3) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна в каждой точке области определения , так как таковой является функция $y = x^n$. Тогда является непрерывной в каждой точке области определения функция $y = x^{\frac{m}{n}}$. Непрерывность функции $y = x^{\alpha}$ с действительным показателем степени α примем без доказательства.

Приведенные ранее примеры непрерывных в точках определения всех основных элементарных функций и теорема о непрерывности композиции функций являются основание следующего важного утверждения.

Теорема 6. Всякая элементарная функция непрерывна в любой точке области определения.

«Замечательные пределы»

Так называются пределы, которые часто и результативно используют в вычислениях пределов функций. Во многих случаях раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ часто выполняется с помощью «первого замечательного предела», существование которого устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 7. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ существует и равен единице.

Доказательство. Поскольку функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, то рассмотрим лишь значения $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (см. рисунок 2).

Пусть $CD \perp OD$, $AB \perp OD$, $OD = OA = 1$. Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}\sin x$, площадь сектора AOD равна $\frac{1}{2}x$, площадь треугольника равна $\frac{1}{2}\mathrm{tg}x$. Поэтому имеем неравенства:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\mathrm{tg}x.$$

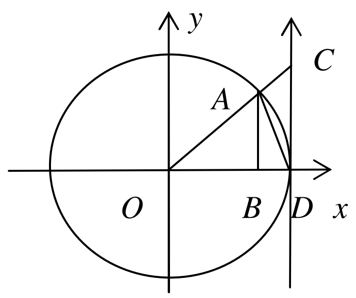

Рисунок 2

Отсюда

$$\sin x < x < \mathrm{tg}x,\ 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Функция косинус непрерывна в точке $x = 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$. Тогда по теореме о промежуточной функции имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Теорема доказана.

Примеры:

1) Применим «первый замечательный предел» для вычисления предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

2) Установим равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Верно равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}.$$

Поскольку $y=\arcsin x \to 0$ при $x \to 0$, то по формуле замены переменной с применением первого замечательного предела получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Аналогично, но с применением предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, устанавливается равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Пусть в пределе

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}$$

функция $f(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Рассмотрим композицию функций $y=f(x)$ и $g(y)=\frac{\sin y}{y}$, равную $\frac{\sin f(x)}{f(x)}$. Тогда по формуле замены переменного в пределе получим равенства:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

Предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$, если $f(x)\to 0$ при $x\to x_0$, назовем обобщением «первого замечательного предела».

Запишем обобщения пределов, рассмотренных в последнем примере:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)}=1, \text{ если } f(x)\to 0 \text{ при } x\to x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1, \text{ если } f(x)\to 0 \text{ при } x\to x_0.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}7x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\operatorname{tg}7x}{7x}=7\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}7x}{7x}=7\cdot 1=1$,

поскольку $f(x)=7x\to 0$, $x\to 0$.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x-3x^2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x-3x^2\right)\left(x-3x^2\right)}{\left(x-3x^2\right)x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x-3x^2\right)}{\left(x-3x^2\right)}\lim_{x\to 0}\frac{x-3x^2}{x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(1-3x)}{x}=\lim_{x\to 0}(1-3x)=1,$$

поскольку $f(x)=\left(x-3x^2\right)\to 0$, $x\to 0$.

Неопределенности вида 1^{∞} можно раскрывать с помощью «второго замечательного предела», который устанавливается в следующей теореме.

Теорема 8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ существует и равен числу e.

Доказательство. В основу доказательства положим определение числа e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

С учетом неравенства $[x]\le x\le[x]+1$ верно двойное неравенство

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

для любого $x>1$. Поскольку функция $[x]$ при $x>1$ принимает положительные целые значения

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)=e\cdot 1=e,$$

Из последнего двойного неравенства по теореме о промежуточной функции имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Рассмотрим случай, когда $x \to -\infty$. Введем новую функцию $y = -x - 1$, которая стремится к $+\infty$ при $x \to -\infty$. Используя формулу замены переменной в пределе и выполняя тождественные преобразования, находим:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y-1}\right)^{-y-1} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-y-1}\right)^{-y-1} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{y+1} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\,.$$

Объединяя рассмотренные случаи стремления переменной x, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,.$$

Теорема доказана.

Пусть $y = \frac{1}{x}$. Переменная y является бесконечно малой при $x \to \infty$. Выполним замену переменной во «втором замечательном пределе»:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e\,.$$

Получили еще одну запись «второго замечательного предела»:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e\,.$$

Примеры:

1) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Применим свойства логарифмов:

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\,.$$

Для того, чтобы применить «второй замечательный предел» воспользуемся непрерывностью логарифмической функции и перейдем к пределу под знаком непрерывной функции:

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}\,.$$

2) Установим, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Функция $y=a^x-1\to 0$ при $x\to 0$. Применим формулу замены переменной в пределе и результат предыдущего примера:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log_a\left(a^x-1+1\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a\left(y+1\right)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Пусть в пределе

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{1/f(x)}$$

функция $f\left(x\right)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. Рассмотрим композицию функций $\left(1+y\right)^{1/y}$ и $y=f\left(x\right)$. Тогда:

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{1/f(x)}=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{1/y}=e.$$

Предел $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{1/f(x)}=e$, если $f\left(x\right)\to 0$ при $x\to x_0$, назовем обобщением «второго замечательного предела».

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3+x}\right)^{3x}$.

Имеем: $\dfrac{x}{3+x}=\dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}\to 1$, $3x\to\infty$ при $x\to\infty$. Тогда выражение под знаком данного примера представляет собой неопределенность вида 1^∞. Для вычисления предела применим «второй замечательный предел».

Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\left(\frac{x}{3+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{x}{3+x}-1\right)^{3x}=\left(1+\frac{-3}{3+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-3}{3+x}\right)^{\frac{1}{-3/(3+x)}\frac{-3}{3+x}3x}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{-3}{3+x}\right)^{\frac{1}{-3/(3+x)}}\right]^{\frac{-9x}{3+x}}.$$

Так как $\frac{-3}{3+x} \to 0$ при $x \to \infty$, то с использованием обобщения «второго замечательного предела», получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3+x}\right)^{\frac{1}{-3/(3+x)}}\right]^{\frac{-9x}{3+x}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3+x}\right)^{\frac{1}{-3/(3+x)}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x}{3+x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x}{3+x}} = e^{-9\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3+x}} = e^{-9}.$$

Сравнение бесконечно малых функций

В вопросе сравнения функций ограничимся сравнением бесконечно малых функций.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$, являются бесконечно малыми при $x \to x_0$, $x_0 \in \overline{R}$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = a$, $a \in R$. Если $a = 0$, то по определению функция $f(x)$ *при* $x \to x_0$ *есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем функция* $g(x)$. Такое отношение между функциями записывается так: $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$. Запись $f(x) = o(1), x \to x_0$, означает, что функция $f(x)$ является *бесконечно малой при* $x \to x_0$. Если $a \neq 0$, то по определению функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *бесконечно малыми функциями одного порядка при* $x \to x_0$. Если $a = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми функциями при* $x \to x_0$. В этом случае пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha(x)$ или $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где функция $\alpha(x)$, определенная в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ существования функции $\frac{f(x)}{g(x)}$, бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Поэтому в равенстве $f(x) = o(g(x))$ ($x \to x_0$) функцию $o(g(x))$ можно представлять как $\alpha(x)g(x)$.

Теорема 9. Для того чтобы $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o(g(x)),\ x \to x_0.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$. Согласно определению $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ некоторая бесконечно малая функция при $x \to x_0$, определенная в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$. Отсюда $f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x)$ или $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to x_0$.

Обратно, если имеет место $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to x_0$. Это означает, что найдется бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $\alpha(x)$, определенная в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и такая, что $f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x)$. Отсюда $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, но тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то есть $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Приведенные ранее примеры пределов приводят следующим важным случаям эквивалентных бесконечно малых функций.

1) $\sin x \sim x$, $x \to 0$.

2) $\arcsin x \sim x$, $x \to 0$.

3) $\mathrm{tg} x \sim x$, $x \to 0$.

4) $\mathrm{arctg} x \sim x$, $x \to 0$.

5) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$ или $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$, $x \to 0$, и в частности $\ln(1+x) \sim x$, $x \to 0$.

6) $a^x - 1 \sim x \ln a$, $x \to 0$, и частности $e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$.

7) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $x \to 0$, $a \in R$.

8) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $x \to 0$.

Полагая $y = f(x)$, где $f(x) \to 0$, $x \to x_0$, с применением формулы замены переменной в пределе композиции каждую эквивалентность можно записать в обобщенном виде, например, $\sin f(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$, или $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$, $x \to x_0$.

В практике вычисления пределов функций приведенные эквивалентности и их обобщения применяют на основе следующего утверждения.

Теорема 10. Пусть функции $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$, $x \to x_0$. Тогда справедливы утверждения:

1) Имеет место эквивалентность

$$f(x)g(x) \sim f_1(x)g_1(x),\ x \to x_0.$$

2) Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и верно равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Доказательство. Приведем доказательство второго утверждения.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g_1(x)f_1(x)}{f_1(x)g(x)g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{f_1(x)}\right)\left(\frac{g(x)}{g_1(x)}\right)\left(\frac{f(x)}{f_1(x)}\right).$$

Поскольку функции $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$, $\dfrac{g(x)}{g_1(x)}$ и $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ имеют предел при $x \to x_0$, то по теореме об арифметических действиях над функциями, имеющими предел, имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{g_1(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Теорема доказана.

Примеры:

1) Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\arcsin 3x}$.

Поскольку $3x \to 0$ при $x \to 0$, то имеем обобщения эквивалентностей из приведенного выше перечня: $\sqrt{1+3x}-1 \sim 3x$, $\arcsin 3x \sim 3x$, $x \to 0$. Тогда по теореме

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{\arcsin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{3x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

2) Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin x}{3x^2 - 5x^3}$.

Поскольку $\sin x \sim x$, $x \to 0$, то по теореме $x\sin x \sim x^2$, $x \to 0$; так как

$$3x^2 - 5x^3 = 3x^2(1 - \frac{5}{3}x)$$

и $1 - \dfrac{5}{3}x \to 1$ при $x \to 0$, то $3x^2 - 5x^3 \sim 3x^2$, $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\sin x}{3x^2 - 5x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$