Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

1. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (10.1)

Второй замечательный предел записывается в двух видах:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e \tag{10.2}$$

2. Сравнение бесконечно малых.

Две бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются *величинами одного и того же порядка малости* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$. В частности, если k = 1, то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентные величины* и пишут $f(x)\sim g(x)$. Таким образом,

$$f(x)\sim g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Теорема. Пусть $f_1(x)\sim f_2(x)$ при $x\to a$, тогда справедливы равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g(x)}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f_2(x)},$$

$$\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f_2(x)\cdot g(x),$$

где $g(x)$ – некоторая функция, определенная в окрестности точки *a*.

Для применения этой теоремы на практике полезно знать как можно больше пар эквивалентных функций. Например, из первого замечательного предела следует, что $\sin x\sim x$. Приведем еще несколько наиболее часто используемых эквивалентностей.

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
1)\ \sin x \sim x, & 6)\ \ln(1+x) \sim x, \\
2)\ \mathrm{tg} x \sim x, & 7)\ \log_a(1+x) \sim x\log_a e, \\
3)\ \arcsin x \sim x, & 8)\ e^x - 1 \sim x, \\
4)\ \mathrm{arctg} x \sim x, & 9)\ a^x - 1 \sim x\ln a, \\
5)\ 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2, & 10)\ (1+x)^a - 1 \sim ax. \\
\hline
\end{array}
\qquad (10.3)
$$

Примеры решения задач

1. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^6}{\sin^5 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1,$$

здесь мы сделали замену $y = \dfrac{1}{x}$, при $x\to\infty$ $y\to 0$, и использовали первый замечательный предел (10.1).

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 8x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x} : \frac{\sin 8x}{8x}\right) = \frac{1}{2}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^6}{\sin^5 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\left(x\cdot\frac{\sin x^6}{x^6}\right) : \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5\right] = (0\cdot 1) : 1^5 = 0.$$

г) При $x\to 1$ имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Сделаем замену $1-x=y$, тогда $x=1-y$ и при $x\to 1$ $y\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = (0\cdot\infty) = \lim_{y\to 0} y\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{y}\right) = \lim_{y\to 0} y\cdot ctg\frac{\pi y}{2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\cos\frac{\pi y}{2} : \frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{y}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi y}{2} : \left[\left(\frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\right)\right] = 1 : \left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) = \frac{2}{\pi}.$$

2.Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}[x(\ln(1+x)-\ln x)]$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x^2}}$.

Решение:

а) Имеем неопределенность вида (1^∞). Выделим у дроби целую часть $\dfrac{2x-3}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)-2}{2x-1}=1-\dfrac{2}{2x-1}$. Обозначим $y=-\dfrac{2}{2x-1}$; при $x\to\infty$ $y\to 0$, причем $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{y}$. Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}+2}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^2=$$

$$=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-4}=e^{-4}.$$

Здесь мы использовали второй замечательный предел (10.2).

б) Имеем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$, т. к.

$$\lim_{x\to\infty}[x(\ln(1+x)-\ln x]=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Перейдем к пределу под знаком логарифма:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\ln e=1.$$

в) Имеем неопределенность вида (1^∞). Преобразуя выражение и используя непрерывность показательно-степенной функции и второй замечательный предел (10.2), получаем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x^2}}=(1^\infty)=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2\sin x}{x}}=e^2.$$

3. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{1-\cos 2x}$.

Решение:

а) Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используем первую эквивалентность из таблицы (10.3) и заменяем $\sin 4x$ на $4x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(4x)^2}{8x^2}=2.$$

б) Используем формулы 5) и 8) из таблицы (10.3). Заменяя бесконечно малые $e^{5x^2}-1$ и $1-\cos 2x$ на $5x^2$ и $\frac{(2x)^2}{2}$, соответственно, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{2x^2}=\frac{5}{2}.$$