Непрерывность функции. Точки разрыва функции

1. Непрерывность функции.

Приведем три эквивалентных определения функции, непрерывной в точке.

1. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a и в самой этой точке, называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

2. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a и в самой этой точке, называется *непрерывной в точке* a, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x$

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

3. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a и в самой этой точке, называется *непрерывной в точке* a, если приращение функции $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ в точке a стремится к нулю, когда приращение аргумента $\Delta x = x - a$ стремится к нулю (см. рис. 11.1), т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

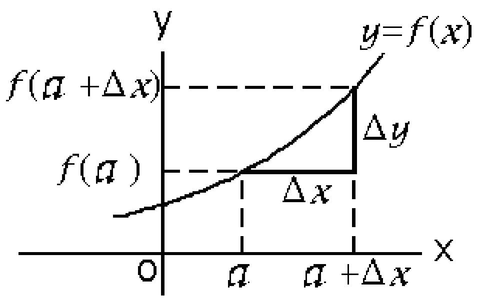

Рис. 11.1

2. Точки разрыва.

Если функция определена в некоторой окрестности точки a, но не является непрерывной в этой точке, то говорят, что она *имеет разрыв* в этой точке, точка a при этом называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Приведем классификацию точек разрыва функции.

1. Точка разрыва $x = a$ функции $y = f(x)$ называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные пределы $f(a-0)$, $f(a+0)$, но функция все же разрывна в a.

(1) a – *точка скачка* функции $y = f(x)$, если $f(a-0) \neq f(a+0)$ (см. рис. 11.2),

(2) *a – точка устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если скачок $f(a+0) - f(a-0)$ равен нулю, т.е. $f(a+0) = f(a-0) = b \neq f(a)$ (см. рис. 11.3).

2. Точка разрыва $x = a$ функции $y = f(x)$ называется *точкой разрыва второго рода*, если a не является точкой разрыва первого рода, т.е. если равен бесконечности или не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$.

(1) *a – точка бесконечного разрыва* функции $y = f(x)$, если пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют, но хотя бы один из них бесконечный (см. рис. 11.4).

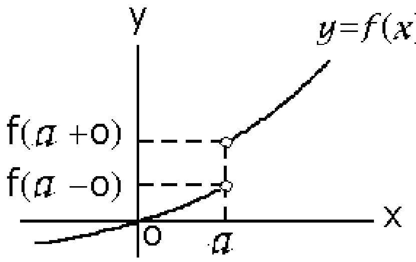

Рис. 11.2

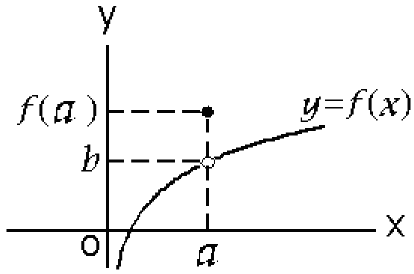

Рис. 11.3

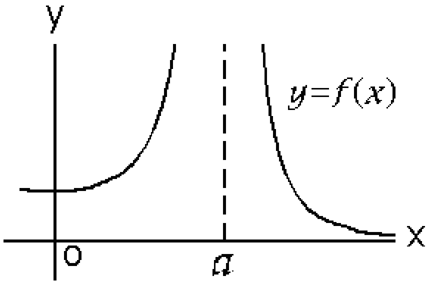

Рис. 11.4

Примеры решения задач

Установить характер точки разрыва функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$ или доказать непрерывность функции в этой точке:

1. $y = \dfrac{\sin x}{x}$; 2. $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ 3. $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$;

4. $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 5. $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение:

1. При $x=0$ функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена, следовательно, она не непрерывна в этой точке. Так как $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то $x=0$ – точка устранимого разрыва I рода.

2. По сравнению с первым примером функция $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \textit{если } x\neq 0,\\ 1, & \textit{если } x=0;\end{cases}$ доопределена в точке $x=0$ так, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$, следовательно, данная функция непрерывна в этой точке.

3. При $x=0$ функция $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ не определена. Так как пределы функции слева и справа от точки $x=0$ конечны и различны:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+0}=1,\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0,$$

то в точке $x=0$ функция имеет разрыв I рода.

4. При $x=0$ функция $y=2^{\frac{1}{x}}$ не определена; $\lim\limits_{x\to 0-}2^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$. Так как один из односторонних пределов бесконечен, то $x=0$ – точка разрыва II рода.

5. При $x = 0$ функция $y=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ не определена. Так как односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\sin\dfrac{1}{x}$ не существуют (значения функции колеблются от –1 до 1 и от 1 до –1, не стремясь ни к какому числу), то $x = 0$ – точка разрыва II рода.