Предел числовой последовательности. Предел функции

1. Предел числовой последовательности.

Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N такое, что $\forall\ n > N$ выполняется неравенство $| x_n - a | < \varepsilon$. Или, используя краткую запись,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N\ | x_n - a | < \varepsilon. \tag{9.1}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что x_n стремится к a или последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то говорят, что она *сходится.* Если последовательность не имеет конечного предела, то ее называют *расходящейся.*

Арифметические свойства пределов последовательностей:

Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$, тогда

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$,
2. $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$,
3. $x_n / y_n \to a / b$, $b \neq 0$.

2. Предел функции.

Число b называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x$

$$| x - a | < \delta \ \Rightarrow\ | f(x) - b | < \varepsilon. \tag{9.2}$$

Определение предела говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a, то $f(x)$ приближается к b, делается как угодно близким к b.

Справедливы следующие свойства предела функции.

1. Если функция имеет предел при $x \to a$, то он единственен.
2. Арифметические свойства пределов: пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где b и c – конечные числа, тогда

a) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c$,

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$,

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$, если $c \neq 0$.

Примеры решения задач

1. Показать, используя определение предела последовательности (9.1), что при $n \to \infty$ последовательность $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, \ldots \frac{3n+4}{2n+1}, \ldots$ имеет пределом число $\frac{3}{2}$.

Решение: Здесь $x_n - \frac{3}{2} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2(2n+1)}$. Определим, при каком значении n выполняется равенство $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$; так как $2(2n+1) > \frac{5}{\varepsilon}$, то $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Итак, если $N = \left[\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1$, то при $n > N$ выполняется неравенство $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x = \frac{3}{2}$.

Так, например, при $\varepsilon = 0{,}1$, заключаем, что неравенство $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0{,}1$ выполняется при $n > N = 13$. Аналогично, неравенство $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0{,}01$ выполняется при $n > N = 125$.

2. Доказать, используя определение предела последовательности (9.1), что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1$.

Решение: Имеем для любого $\varepsilon > 0$: $\left|\frac{3^n - 1}{3^n} - 1\right| = \left|1 - \frac{1}{3^n} - 1\right| = \frac{1}{3^n} < \varepsilon$, следовательно, $3^n > \frac{1}{\varepsilon}$ или $\log_3 3^n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$, отсюда получаем $n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, если выбрать $N = \left[\log_3 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, то при $n >$N будет выполняться неравенство $\left|\frac{3^n - 1}{3^n} - 1\right| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1$.

3. Доказать, используя определение предела функции (9.2), что функция $f(x) = 3x - 2$ в точке $x = 1$ имеет предел равный 1, т.е. $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$.

Решение: Имеем для любого $\varepsilon > 0$: $|(3x-2) - 1| = |3(x-1)| = 3|x-1| < \varepsilon$, отсюда получаем $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$, так что, если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, то из того, что $|x-1| < \delta$ будет следовать, что $|(3x-2) - 1| < \varepsilon$.

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение:

а) На основании непрерывности функции в точке $x=7$ искомый предел равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to 7}\frac{3x+5}{x-5}=\frac{3\cdot 7+5}{7-5}=13.$$

б) При $x\to 5$ числитель стремится к 20, т.е. является ограниченной функцией, а знаменатель стремится к 0, т.е. является бесконечно малой величиной. Очевидно, что их отношение есть величина бесконечно большая, т.е.

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x+5}{x-5}=\infty.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, так как отношение ограниченной функции $\sin x, (|\sin x|\le 1)$, к бесконечно большой величине $x\,(x\to\infty)$ есть величина бесконечно малая.

5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$.

Решение:

а) Здесь при $x\to 3$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы избавится от неопределенности, раскладываем числитель и знаменатель на множители и сокращаем дробь на одинаковый множитель $(x-3)$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=1/9.$$

б) Здесь снова имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\frac{1}{8}.$$

6. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{6x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$.

Решение:

а) Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вынесем в числителе и знаменателе дроби x в максимальной степени за скобки и сократим, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{6x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(3+2/x)}{x(6+5/x)}=3/6.$$

б) Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное ему выражение, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

в) Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 3}\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)(x+3)}=-\frac{1}{6}.$$