Лекция 15. Определение производной; ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций

Определение производной; ее геометрический и механический смысл

Понятие производной возникло в результате усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой и задача о вычислении скорости неравномерного движения.

1. Рассмотрим вопрос о нахождении касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$, предполагая, что касательная существует. Пусть $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ – произвольная точка на кривой $y = f(x)$.

Пусть секущая MM_1 составляет с положительным направлением оси OX угол φ. Из прямоугольного треугольника MM_1N (см. рис. 1) находим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

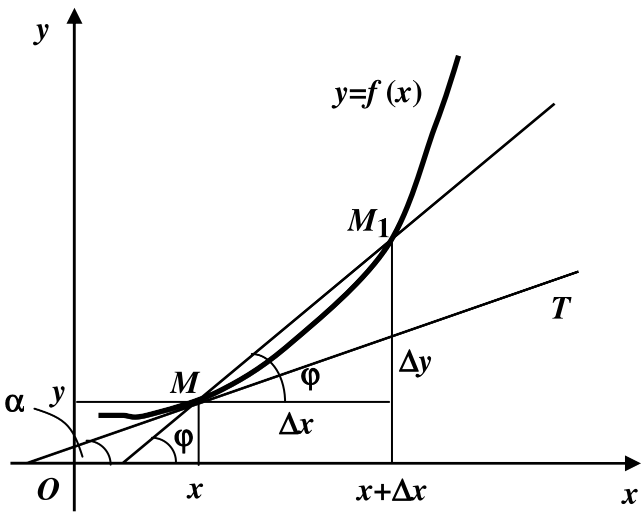

Рисунок 1

Пусть $M_1 \to M$, тогда $\Delta x \to 0$ и секущая стремится к своему предельному положению – касательной MT в точке M. Обозначим через α угол между касательной MT и направлением оси OX . Тогда при $\Delta x \to 0$ имеем $\varphi \to \alpha$ и в силу непрерывности тангенса $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, угловой коэффициент касательной в точке M будет равен $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Мы пришли к понятию *производной* функции в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x).$$

Итак, *угловой коэффициент касательной к графику функции y = f(x) в точке x равен значению ее производной в этой точке: k = f '(x)***.**

2. Пусть уравнение $S = f(t)$, где f – функция от времени t, а S – пройденный путь, выражает закон движения материальной точки. Необходимо найти скорость движущей точки.

Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение M ($OM = S$). В момент $t + \Delta t$ точка займет положение M_1 ($OM_1 = S + \Delta S$) (см. рис. 2).

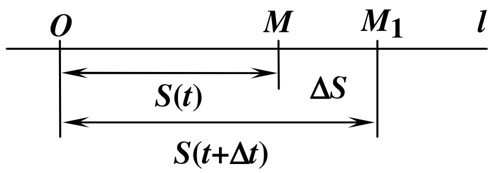

Рисунок 2

Отсюда $S + \Delta S = f\,(t + \Delta t)$. За время Δt точка пройдет путь $\Delta S = f\,(t + \Delta t) - f(t)$. Следовательно, отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{f\,(t + \Delta t) - f\,(t)}{\Delta t}$ выражает скорость движения точки за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ есть мгновенная скорость, т.е. скорость движения в момент времени t:

$$v_{\text{мг}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t).$$

Обе задачи привели к одной и той же математической операции, которую назвали *дифференцированием* функции, а результат – *производной* функции.

Производной функции $y = f\,(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Пример. Исходя из определения производной, вычислить $y'(8)$, если $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение. По определению производной (1) находим

$$y'(8) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8 + \Delta x} - \sqrt[3]{8}}{\Delta x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + \Delta x - 8}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8+\Delta x} + 4\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8+\Delta x} + 4\right)} = \frac{1}{12}.$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала (a; b), называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Переходя к переделу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Обратное утверждение неверно: непрерывная в точке функция может не иметь производной в этой точке. Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точке x = 0, но не имеет производной в этой точке. Действительно, в точке x=0 имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y = |x|$ не имеет производной в точке x=0, график функции не имеет касательной в точке (0; 0).

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении ($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать *уравнение касательной:*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью* к кривой. Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент $k_{\text{норм.}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ (если } f'(x_0) \neq 0\text{).} \quad (3)$$

Правила дифференцирования

Нахождение производной функции непосредственно по определению (6.1) часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - две дифференцируемые в некотором интервале (a; b) функции.

Теорема 2. Производная суммы (разности), произведения и частного двух функций u и v вычисляются по формулам:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (4)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad (5)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad v \neq 0. \quad (6)$$

Доказательство. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v';$$

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot u(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x) + \Delta v) v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Следствие. Для любого $C \in R$ имеет место равенство

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x). \tag{7}$$

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом *u* и независимым аргументом *x*.

Теорема 3. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке *x*, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке *x*, которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{8}$$

Доказательство. По условию $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке *x*: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, поэтому $\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x$, где $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Подставив значение Δu в равенство для Δy, получим

$$\Delta y = y'_u (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha \cdot (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т.е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Итак, для нахождения производной сложной функции надо *производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.*

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ - взаимно обратные функции.

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a; b) и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строго монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{10}$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (6.10) следует равенство $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$,

т.е. $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Примеры.

а) Найти производную функции $y=\mathrm{tg}^3\ln\frac{x}{x+1}$.

Решение. Используя правило дифференцирования сложной функции (8), находим

$$y'=(\mathrm{tg}^3\ln\frac{x}{x+1})'=3\mathrm{tg}^2\ln\frac{x}{x+1}\cdot(\mathrm{tg}\ln\frac{x}{x+1})'=3\,\mathrm{tg}^2\ln\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)}\times\times(\ln\frac{x}{x+1})'=$$

$$=3\,\mathrm{tg}^2\,\ln\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'=3\,\mathrm{tg}^2\,\ln\frac{x}{x+1}\times$$

$$\times\frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=3\,\mathrm{tg}^2\,\ln\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)}\times$$

$$\times\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3}{x^2+x}\cdot\mathrm{tg}^2\,\ln\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)}.$$

б) Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции (9), найти производную y'_x для функции $y=\sqrt[3]{2x+1}$.

Решение. Обратная функция $x=\frac{1}{2}\left(y^3-1\right)$ имеет производную $x'_y=\frac{3}{2}y^2$. Следовательно,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3y^2/2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$$

Производные основных элементарных функций. Таблица производных

1. ***Степенная функция*** $y=x^n$, $n\in N$.

Дадим аргументу x приращение Δx. Функция $y=x^n$ получит приращение $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y=(x^n+n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n)-x^n=$$

$$=n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n}{\Delta x}=$$

$$=n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}.$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right)=n\cdot x^{n-1}.$$

Таким образом,

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}.$$

Отметим, что выведенная формула производной степенной функции справедлива при любом $n\in R$ (а не только натуральном), что будет показано ниже.

2. *Показательная функция* $y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$

Найдем сначала производную функции $y=e^x$. Придав аргументу x приращение Δx, находим приращение функции Δy: $\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)$. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$, где переходим к пределу $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\left\{e^{\Delta x}-1\sim\Delta x\right\}=e^x\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=e^x.$$

Таким образом,

$$(e^x)'=e^x.$$

Теперь рассмотрим функцию $y=a^x,\ x\in R$. Так как $a^x=e^{x\ln a}$, по формуле производной сложной функции (6.8) находим:

$$(a^x)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}(x\cdot\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a.$$

Таким образом, $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$.

Пример. Найти производную функции $y=5^{x^3+2x}$.

Решение. Используя формулу производной сложной функции (6.8) и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = \left(5^{x^3+2x}\right)' = 5^{x^3+2x}\ln 5\cdot\left(x^3+2x\right)' = 5^{x^3+2x}\ln 5\cdot\left(3x^2+2\right).$$

3. ***Логарифмическая функция*** $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x},$$

т.е. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$.

Пример. Найти производную функции $y = \ln(x^2+5x-6)$.

Решение. Используя формулу производной сложной функции (6.8) и формулу производной логарифмической функции, находим

$$y' = \left(\ln(x^2+5x-6)\right)' = \frac{1}{x^2+5x-6}\left(x^2+5x-6\right)' = \frac{2x+5}{x^2+5x-6}.$$

Найдем производную степенной функции $y = x^{\alpha}$ с любым показателем $\alpha \in R$. В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно написать $x^{\alpha} = e^{\alpha\cdot\ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции (6.8) находим

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\alpha\cdot\ln x}\right)' = e^{\alpha\cdot\ln x}\cdot(\alpha\cdot\ln x)' = \alpha\cdot e^{\alpha\cdot\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot\frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1},$$

т.е. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Формула остается справедливой и для всех $x<0$, если функция $y=x^{\alpha}$ существует.

4. ***Тригонометрические функции*** $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x$

Для функции $y=\sin x$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x,$$

т.е. $(\sin x)'=\cos x$.

Найдем производную функции $y=\cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции (6.8):

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x,$$

т.е. $(\cos x)'=-\sin x$.

Для нахождения производных функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного (6.6):

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т.е. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

т.е. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Пример. Найти производную функции $y=\sin(4x)$.

Решение. Используя формулу производной сложной функции (6.8) и формулу производной функции $y = \sin x$, находим

$$y' = \left(\sin(4x)\right)' = \cos(4x)(4x)' = 4\cos(4x).$$

5. ***Обратные тригонометрические функции***

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x$$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x' = \cos y \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций (9)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Формулу для производной функции $y = \arccos x$ получим, воспользовавшись тождеством $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций (6.9), получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. } \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

т.е. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример. Найти производную функции $y = \arccos\sqrt{x}$.

Решение. Используя формулу производной сложной функции (6.8) и формулу производной функции $y = \arccos x$, находим

$$y' = \left(\arccos\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

6. ***Гиперболические функции*** $y = \operatorname{sh} x,\ y = \operatorname{ch} x,\ y = \operatorname{th} x,\ y = \operatorname{cth} x$

Гиперболические функции определяются следующими формулами:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус;

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ и $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический тангенс и котангенс.

Между гиперболическими функциями $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ существует следующая зависимость: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Найдем производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ т.е. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ т.е. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \text{ т.е. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ т.е. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Выведенные формулы производных основных элементарных функций запишем в виде таблицы (см. табл. 6.1). На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент “x” заменен на промежуточный аргумент “u”.

Таблица 1.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0,$	10. $(e^u)' = e^u \cdot u',$
2. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u',$	11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$
3. $(\sin u)' = \cos u \cdot u',$	12. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$
4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u',$	13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u',$
5. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$	14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u',$
6. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$	15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u',$
7. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u',$	16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u',$
8. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u',$	17. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u',$
9. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',$	18. $(\operatorname{cth} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$