Лекция 16. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Дифференциал функции

Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно *y*, то функция задана в явном виде (явная функция).

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает функцию $y = f(x)$ *неявно*, если существует множество *E* такое, что для любого $x \in E$ существует по крайней мере одно *y*, удовлетворяющее уравнению $F(x, y) = 0$. Одно и то же уравнение может задавать не одну, а несколько функций.

Если неявная функция задана уравнением $F(x, y) = 0$**,** то для нахождения производной от *y* по *x* нет необходимости разрешать уравнение относительно *y*: *достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x, и полученное затем уравнение разрешить относительно* y'. Производная неявной функции выражается через аргумент *x* и функцию *y*.

Пример. Найти производную функции *y*, заданную уравнением $5x^3 + y^2 - 7xy = 0$.

Решение. Функция *y* задана неявно. Дифференцируем по *x* равенство $5x^3 + y^2 - 7xy = 0$:

$$15x^2 + 2y \cdot y' - 7(x'y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x^2 + 2y \cdot y' - 7(y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y \cdot y' - 7xy' = 7y - 15x^2 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{7y - 15x^2}{2y - 7x}.$$

Говорят, что функция задана *параметрически***,** если она задана уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где *t* – параметр, пробегающий промежуток значений *T*.

Теорема 1. Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют производные в окрестности некоторой точки t и $x'(t) \neq 0$. Тогда параметрически заданная функция имеет производную в этой точке, которая находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad \text{или} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Функция $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. С учетом равенства $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ получаем $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$.

Пример. Пусть $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение. Находим $x'_t = 2t, y'_t = 3t^2$. По формуле (1) находим

$$y'_x = \frac{3t^2}{2t}, y'_x = \frac{3}{2}t.$$

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

Пример. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2 \cdot (3-x)^5}}$.

Решение. Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2 \cdot (3-x)^5}} = \ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2} - \ln(3-x)^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln\left(x^2+2\right) - 5\ln(3-x).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x}.$$

Выражаем y':

$$y' = y\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x}\right),$$

т.е.

$$y' = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2\cdot(3-x)^5}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x}\right).$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ - заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y = \ln\left(u(x)^{v(x)}\right) = v(x)\ln u(x), \qquad \left(\ln y\right)' = v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}.$$

Так как $\left(\ln y\right)' = \frac{y'}{y}$, то $y' = y\cdot\left(\ln y\right)'$. Следовательно,

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right). \tag{2}$$

Пример. Найти производную функции $y = (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}}$.

Решение. Пользуясь формулой (2), получаем

$$y' = (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}}\cdot\ln(x^3+4)\cdot(\ln\sin\sqrt{x})' + \ln\sin\sqrt{x}\cdot(x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}-1}\cdot(x^3+4)' =$$

$$=(x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}}\cdot\ln(x^3+4)\cdot\frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \ln\sin\sqrt{x}\cdot(x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}-1}\cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}}\cdot\ln(x^3+4)\cdot\frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 3x^2\cdot\ln\sin\sqrt{x}\cdot(x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}-1}.$$

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется производной первого порядка.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается y'' (или $f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$). Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка и обозначается y''' (или $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$). Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной) называется производная *n*-1 порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{3}$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^{VI} или $y^{(6)}$ - производная шестого порядка).

Пример. Найти производную n -го порядка функции

$$y = 3^{2x+5}.$$

Решение. Найдем последовательно

$$y'(x) = \left(3^{2x+5}\right)' = 3^{2x+5}(\ln 3)2,$$

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(3^{2x+5}(\ln 3)2\right)' = 3^{2x+5}(\ln 3)^2 2^2,$$

$$y'''(x) = (y''(x))' = \left(3^{2x+5}(\ln 3)^2 2^2\right)' = 3^{2x+5}(\ln 3)^3 2^3.$$

Проанализировав эти выражения, делаем предположение, что

$$y^{(n)}(x) = 3^{2x+5}(\ln 3)^n 2^n.$$

Докажем эту формулу методом математической индукции. Проверим, что она справедлива при $n = 1$, т.е.

$$y^{(1)}(x) = 3^{2x+5}(\ln 3)2 = y'(x).$$

Дифференцирование $f^{(n)}$ эквивалентно замене n на $n + 1$, т.е.

$$\left(y^{(n)}(x)\right)' = \left(3^{2x+5}(\ln 3)^n 2^n\right)' = 3^{2x+5}(\ln 3)^{n+1}2^{n+1} = y^{(n+1)}(x).$$

Пусть материальная точка *M* движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S'_t равная скорости точки в данный момент времени: $S'_t = v$.

Покажем, что *вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки*, т.е.

$$S''(t) = a\,. \tag{4}$$

В этом состоит *механический смысл производной второго порядка*.

Пусть в момент времени t скорость точки равна v, а в момент $t+\Delta t$ - скорость равна $v+\Delta v$, т.е. за время Δt скорость изменилась на величину Δv. Отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки M в данный момент времени t и обозначается буквой a: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=a$, т.е. $v'=a$. Но $v=S'_t$. Поэтому $a=(S'_t)'$, т.е. $a=S''_t$.

Рассмотрим вопрос о нахождении производных высших порядков от функции, заданных параметрически.

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле (6.11). Найдем вторую производную от функции, заданную параметрически. Из определения второй производной и равенства (6.11) следует, что

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

т.е.

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{5}$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx}=\frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \ \ldots \tag{6}$$

Пример. Найти $y'''{}_{xxx}$ от функции $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

Решение. По формуле (1) находим

$$y'{}_x=\frac{\left(e^{-t}\sin t\right)'_t}{\left(e^{-t}\cos t\right)'_t}=\frac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}.$$

По формуле (6.15) находим y''_{xx}

$$y''{}_{xx}=\frac{\left(\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}\right)'_t}{\left(e^{-t}\cos t\right)'_t}=-\frac{2}{e^{-t}\left(\sin t+\cos t\right)^3}.$$

По формуле (6) окончательно находим y'''_{xxx}:

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(-\dfrac{2}{e^{-t}\left(\sin t+\cos t\right)^3}\right)'_t}{\left(e^{-t}\cos t\right)'_t} = \frac{8\sin t-4\cos t}{e^{-2t}\left(\sin t+\cos t\right)^5}.$$

Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в некоторой точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, или $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x)\cdot\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx, т.к.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ называют *главной частью приращения* функции Δy.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy:

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x. \tag{7}$$

Дифференциал dy называют также *дифференциалом первого порядка*.

Так как $x'=1$, то, согласно формуле (7), имеем $dx=\Delta x$. Поэтому формулу (7) можно записать так:

$$dy=f'(x)\cdot dx. \tag{8}$$

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (см. рис. 1). На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т.е. } |AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$. Сравнивая полученный результат с формулой (7), получаем $dy = AB$, т.е. дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

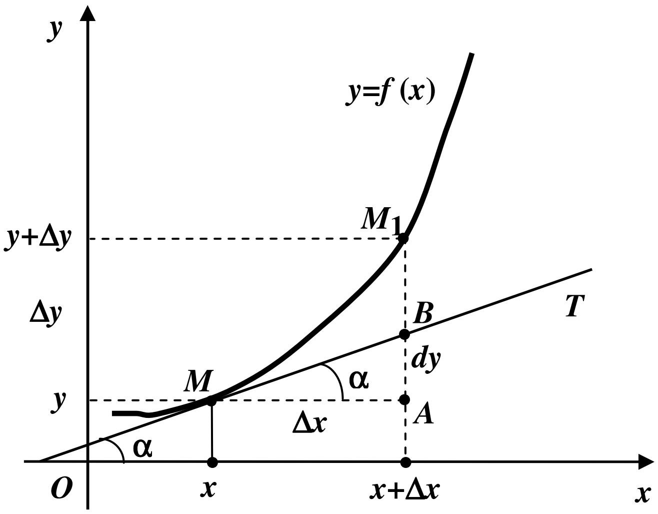

Рисунок 1.

Основные теоремы о дифференциалах и таблицу дифференциалов основных элементарных функций можно легко найти, используя определение дифференциала (8). См. табл. 2.

Подробно рассмотрим лишь вопрос о дифференциале сложной функции.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получаем $y'_x dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx$. Но $y'_x dx = dy$ и $u'_x dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно записать переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du\,. \qquad (9)$$

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой, независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Пример. Найти дифференциал функции $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$.

Решение. По формуле (8) находим

$$dy = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}\right)' dx = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)' +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'\right)dx = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{2+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx = = \frac{x^2}{x^4+x^2-2}\,dx.$$

Таблица.2

Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$;

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0$;

4. $dy = y'_x dx$, если $y = f(x)$;

5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;

6. $\mathrm{d}C = 0$;

7. $\mathrm{d}\left(u^\alpha\right) = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot du$;

8. $\mathrm{d}(\sin u) = \cos u \cdot du$;

9. $\mathrm{d}(\cos u) = -\sin u \cdot du$;

10. $\mathrm{d}(\operatorname{tg} u) = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot du$;

11. $\mathrm{d}(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot du$;

12. $\mathrm{d}(\log_a u) = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$;

13. $\mathrm{d}(\ln u) = \dfrac{1}{u} \cdot du$;

14. $\mathrm{d}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$;

15. $\mathrm{d}(e^u) = e^u \cdot du$;

16. $\mathrm{d}(\arcsin u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot du$;

17. $\mathrm{d}(\arccos u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot du$;

18. $\mathrm{d}(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot du$;

19. $\mathrm{d}(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{1}{1 + u^2} \cdot du$;

20. $\mathrm{d}(\mathrm{sh} u) = \mathrm{ch} u \cdot du$;

21. $\mathrm{d}(\mathrm{ch} u) = \mathrm{sh} u \cdot du$;

22. $\mathrm{d}(\mathrm{th}\, u) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot du$;

23. $\mathrm{d}(\mathrm{cth}\, u) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot du$.

Рассмотрим, как применяются дифференциалы к приближенным вычислениям.

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Подставляя в это равенство значения $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, получим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (10)$$

Пример. Найти приближенное значение arctg 1,05.

Решение. Рассмострим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Пусть $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}05$. Находим $f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

По формуле (6.20) находим

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 = 0{,}81.$$

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x – независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ есть также функция от x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается $d^2 y$.

Итак, по определению $d^2 y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т.е.

$$d^2 y = f''(x)dx^2. \tag{11}$$

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)' \cdot dx = f'''(x)dx^3.$$

И, вообще, дифференциал n-го порядка есть дифференциал от дифференциала (n - 1)-го порядка:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)(dx)^n. \tag{12}$$

Отметим, что все выше приведенные формулы для дифференциалов высших порядков справедливы только, если x – независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x – функция от какой-то независимой переменной, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Используя формулу дифференциала произведения ($d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$), получаем

$$d^2 y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx \cdot dx + f'(x) \cdot dx^2,$$

т.е.

$$d^2 y = f''(x)dx^2 + f'(x) \cdot d^2 x. \tag{13}$$

Сравнивая формулы (11) и (13), убеждаемся, что в случае сложной функции формула дифференциала второго порядка изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x)\cdot dx^2$.

Примеры.

а) Найти d^2y, если $y=e^{x^2}$ и x – независимая переменная.

Решение. Так как $y'=e^{x^2}(x^2)'=2x\cdot e^{x^2}$,

$$y''=\left(2x\cdot e^{x^2}\right)'=2\left(x'\cdot e^{x^2}+x\left(e^{x^2}\right)'\right)=2\left(1+2x^2\right)\cdot e^{x^2},$$

то по формуле (6.21) имеем

$$d^2y=2\left(1+2x^2\right)\cdot e^{x^2}\cdot dx^2.$$

б) Найти d^2y, если $y=x^3$ и $x=t^2+2t$ и t - независимая переменная.

Решение. Используем формулу (6.23). Так как

$$y'=3x^2,\ y''=6x,\ dx=(2t+2)dt,\ d^2x=2dt^2,$$

То

$$d^2y=6x\cdot dx^2+3x^2\cdot 2dt^2=6(t^2+2t)(2(t+1)dt)^2+6(t^2+2t)^2dt^2=$$

$$=\left(t^4+6t^3+6t^2+8t\right)dt^2.$$