Лекция 17. Теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя. Формула Тейлора

Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in(a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c)=0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, соответственно, M и m. Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a;b]$ и, следовательно, ее производна $f'(x)=0$ в любой точке отрезка $[a;b]$.

Если $M\neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во внутренней точке c интервала $(a;b)$, так как $f(a)=f(b)$.

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $x=c\in(a;b)$, т.е. $f(c)=M$. Тогда для всех $x\in(a;b)$ выполняется соотношение

$$f(c)\geq f(x).$$

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x=c$:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

В силу условия $f(c)\geq f(x)$ верно равенство $f(c+\Delta x)\leq 0$. Если $\Delta x>0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0 \text{ и поэтому } f'(c)\leq 0.$$

Если $\Delta x<0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0 \text{ и поэтому } f'(c)\geq 0.$$

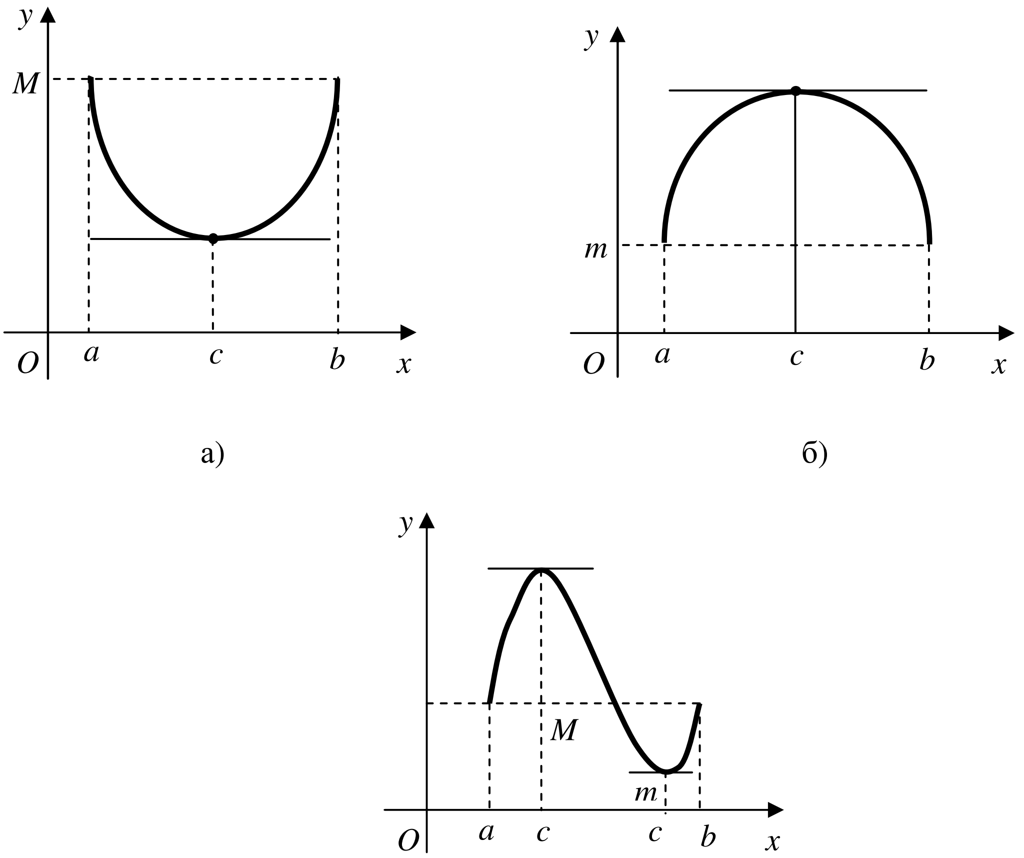
Таким образом, $f'(c)=0$.

В случае, когда $f(c)=m$, доказательство аналогичное.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y=f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (см. рис. 1).

Теорема 2 (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (1)$$



в)

Рисунок 1

Доказательство. Отметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае по теореме Роля нашлась бы точка c, такая, что $g'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, так как является линейной комбинацией функций $f(x)$ и $g(x)$; на концах отрезка она принимает одинаковые значения $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

На основании теоремы Ролля найдется точка $c \in (a;b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0$. Но $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, следовательно,

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \varphi'(c) = 0.$$

Отсюда следует

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\varphi'(c) \text{ или } \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Теорема 3 (Лангранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a). \quad (2)$$

Доказательство. Теорему Лангранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши. Действительно, положив $g(x)=x$, находим $g(b)-g(a)=b-a$, $g'(x)=1,\ g'(c)=1$. Подставляя эти значения в формулу (1), получаем

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{или} \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a).$$

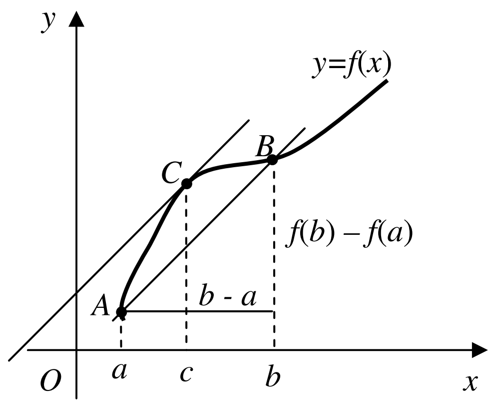


Рисунок 2.

Полученную формулу называют *формулой Лангранжа* или *формулой о конечном приращении*: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a;b]$ равно приращению аргумента, умноженного на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Теорема Лангранжа имеет простой геометрический смысл. Запишем формулу (2) в виде $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, где $a<c<b$. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей AB, а величина $f'(c)$ - угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x=c$.

Следовательно, геометрический смысл теоремы Ланграньжа таков: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$ (см. рис. 2), в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB .

Правило Лопиталя

В этом параграфе понятие производной будет применено для раскрытия неопределенностей при вычислении пределов. Ниже приведены теоремы, позволяющие раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки x_0, причем $f(x_0) = g(x_0) = 0$ и существуют конечные производные $f'(x_0)$ и $g'(x_0) \neq 0$, то существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Доказательство. По условию теоремы $f(x_0) = g(x_0) = 0$, поэтому дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ можно переписать в виде $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$. Поделим числитель и знаменатель последней дроби на $x - x_0$, следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Теорема 5. Пусть: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале (a, b); 2) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$; 3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$; 4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; то существует и предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывными на отрезке $[a, b]$. Следовательно, для любого $x \in (a, b)$

доопределенные функции на отрезке [a, x], будут удовлетворять условиям теоремы Коши о среднем значении, и поэтому будет существовать точка c=c(x), $a < c < x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to a} c(x) = a$ и предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

и, следовательно, существует

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 6. Пусть: 1) функции f(x) и g(x) определены и дифференцируемы на интервале (a, b); 2) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$; 3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$; 4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; то существует и предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3}$$

Из предыдущих теорем следует, что при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно применить *правило Лопиталя* (или *правило Лопиталя-Бернулли*), то есть воспользоваться формулой (3). Правило Лопиталя можно применять несколько раз подряд, но только конечное число раз, пока не исчезнет неопределенность.

Неопределенности вида $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Рассмотрим отдельные случаи.

При неопределенности вида $\infty - \infty$ сделаем следующее преобразование, которое приведет данную неопределенность к виду $\frac{0}{0}$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}.$$

При неопределенности вида $0\cdot\infty$, например, когда

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=+\infty,$$

сделав преобразование

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ или } f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

получим неопределенность $\frac{0}{0}$ в первом случае и неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ во втором случае.

Остальные неопределенности $0^0, 1^\infty, \infty^0$ раскрываются путем предварительного логарифмирования. Пусть, например,

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=0,$$

тогда

$$y=f(x)^{g(x)},\ \ \ln y=g(x)\cdot\ln f(x),\ \ y=e^{g(x)\cdot\ln f(x)},$$

где $g(x)\cdot\ln f(x)$ представляет собой неопределенность вида $0\cdot\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Формула Тейлора

Пусть задан многочлен n-ой степени:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n. \qquad (4)$$

Покажем, что его можно переписать в виде

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\frac{p^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ \ldots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (5)$$

где (n)- производная n-го порядка.

Действительно, продифференцируем (4) n раз

$$p'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1},$$

$$p''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots+(n-1)\cdot na_nx^{n-2},$$

$$p'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)\cdot na_nx^{n-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_n,$$

и, положим $x = 0$. Получим

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}, \quad a_4 = \frac{p^{(4)}(0)}{4!} \dots, \quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Аналогично можно доказать, что многочлен

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

можно представить как

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (6)$$

Формула (5) является частным случаем формулы (6) при $x_0 = 0$. Формула (6) называется *формулой Тейлора* для многочлена.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$, определенную в промежутке [a, b], имеющую в этом промежутке и в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ производные до (n-1)-порядка. Пусть также $f(x)$ имеет производную n-порядка в точке x_0. Тогда для этой функции можно построить многочлен

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Так как функция $f(x)$ не обязательно является многочленом, следовательно, не обязательно, что $f(x) = p(x)$. Многочлен $p(x)$ приближенно равен функции $f(x)$, обозначим разность между ними $r(x) = f(x) - p(x)$. Можно доказать, что при $x \to x_0$ разность $r(x)$ будет бесконечно малой порядка выше n-го по сравнению с $x - x_0$, то есть

$$r(x) = o((x - x_0)^n).$$

Тогда имеет место следующая формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \qquad (7)$$

Функция $r(x) = o((x - x_0)^n)$ называется *остаточным членом в форме Пеано*, а формула (7) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*. Правая часть формулы (7) называется *разложением функции* $f(x)$ *в окрестности точки* x_0 или *по степеням* $(x - x_0)$.

Отметим, что существует несколько форм записей остаточного члена. Наиболее распространенной формой является *остаточный член в форме Лагранжа*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{8}$$

Сформулируем предыдущие выкладки в виде теоремы.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет производные до n-порядка в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки справедлива формула (7).

Нетрудно показать, что представление функции $f(x)$ в виде (7) единственно.

Теорема 8. Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

то такое представление единственно.

Доказательство. Действительно, пусть существует другое представление в виде

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

тогда, приравняв правые части в последних двух равенствах, получим

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + o((x - x_0)^n),$$

и, при $x \to x_0$ найдем $a_0 = b_0$. Поделив равенство

$$a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + o((x - x_0)^n)$$

на $(x - x_0)$, получим

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots = b_1 + b_2(x - x_0) + \ldots + o((x - x_0)^{n-1}),$$

откуда при $x \to x_0$ найдем $a_1 = b_1$, и т.д. Тем самым теорема доказана.

Из теорем (7), (8) получим следствие в виде теоремы.

Теорема 9. Разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора (7) единственно в том смысле, что если существуют числа $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$, такие что

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – бесконечно малая величина выше n-го порядка при $x \to x_0$, то

$$b_0 = f(x_0), \quad b_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, \quad b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то получим формулу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o((x)^n), \tag{9}$$

которая называется *формулой Маклорена*. В этом случае говорят о разложении функции $f(x)$ по степеням x.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена.

1) Пусть $f(x)=e^x$, тогда $f^{(n)}(x)=e^x$, $(n=1,2,3,...)$, отсюда $f(0)=1,\ f^{(n)}(0)=1$ по формуле (9) получим

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0. \qquad (10)$$

2) Если $f(x)=\sin x$, то $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{IV}(x)=\sin x$ и т.д. Поэтому $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0$ и т.д., или,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^n, & n=2k+1,\end{cases}\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

следовательно,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),\quad x\to 0. \qquad (11)$$

3) Если $f(x)=\cos x$, то $f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f^{IV}(x)=\cos x$ и т.д. Поэтому $f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,\ f^{IV}(0)=1$ и т.д., или,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ (-1)^n, & n=2k,\end{cases}\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

отсюда,

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),\quad x\to 0. \qquad (12)$$

4) Пусть $f(x)=(1+x)^m$, $m\notin \mathrm{N}, m\neq 0$, тогда найдем $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$, $f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$, ..., $f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, следовательно, $f(0)=1,\ f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots(m-n+1)$, так что разложение имеет вид

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0. \qquad (13)$$

Приведем частный случай формулы (13) при $m=-1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (14)$$

5) Если $f(x) = \ln(1+x)$, то, вычислив производные, получим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \ldots, \; f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

или, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$, n=1, 2, 3, …, поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (15)$$

6) Пусть $f(x) = \mathrm{ch}x$. Известно, что гиперболический синус можно представить в виде $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, тогда используя формулу (10), найдем

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0. \qquad (16)$$

7) Если $f(x) = \mathrm{sh}x$, то, используя формулу $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, с помощью (10), найдем

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \qquad (17)$$

8) Для $f(x) = \mathrm{arctg}x$ разложение по формуле (9) имеет вид

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}), \quad x \to 0 \qquad (18)$$

Отметим, что формулу Тейлора или формулу Маклорена можно использовать при вычислении пределов. Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора в виде

$$f(x) = p(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

где многочлен $p(x)$ называют *главной частью функции* $f(x)$ *в окрестности* x_0. Именно, главную часть функции $f(x)$ используют при нахождении пределов.