Лекция 18. Исследование функций и построение графиков

Монотонность и экстремумы функции

Функция, только возрастающая или только убывающая на некотором промежутке, называется *монотонной* на этом промежутке. Строго возрастающая или строго убывающая функция называется *строго монотонной.* При этом говорят, что функция (*строго*) *монотонно возрастает* или (*строго*) *монотонно убывает*.

Теорема 1. (Необходимый признак монотонности функции).

1) Если дифференцируемая функция $f(x)$ монотонно возрастает на некотором промежутке, то ее производная неотрицательна на этом промежутке, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если дифференцируемая функция $f(x)$ монотонно убывает на некотором промежутке, то ее производная неположительная на этом промежутке т.е. $f'(x) \leq 0$.

Геометрически утверждение теоремы сводится к тому, что для графика возрастающей дифференцируемой функции касательные образуют с положительным направлением оси Ox острые углы α $(tg\alpha = f'(x))$ или в некоторых точках параллельны оси Ox (см рисунок 1), а для убывающей функции – углы, большие прямого угла (см. рисунок 2).

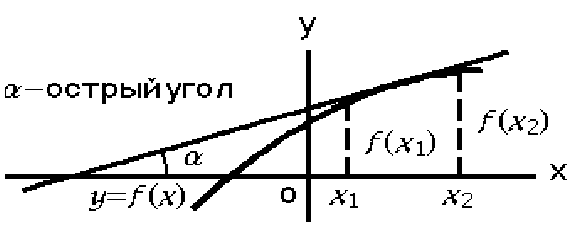

Рисунок 1

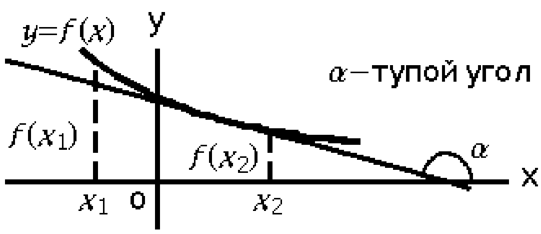

Рисунок 2

Теорема 2. (Достаточный признак монотонности функции).

1) Если производная дифференцируемой функции строго положительна внутри некоторого промежутка, т.е. $f'(x) > 0$, то функция строго монотонно возрастает на этом промежутке.

2) Если производная дифференцируемой функции строго отрицательна внутри некоторого промежутка, т.е. $f'(x) < 0$, то функция строго монотонно убывает на этом промежутке.

Точка x_0 называется *точкой максимума* (рис. 3) (*минимума* (рис. 4)) функции $f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки, такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

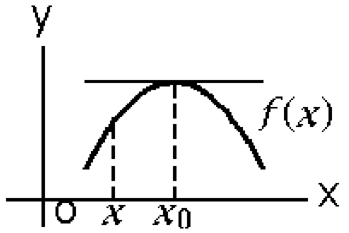

Рисунок 3

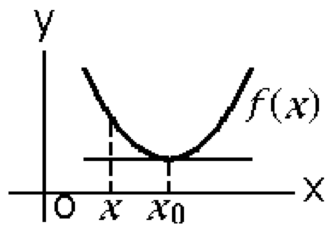

Рисунок 4

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Теорема 3. (Необходимое условие экстремума). Пусть функция непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет экстремум в этой точке. Тогда производная функции в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Геометрически это означает, что в точке экстремума функции $y=f(x)$ касательная к ее графику либо параллельна оси Ox (как на рисунке 5), либо не существует (как на рисунке 6).

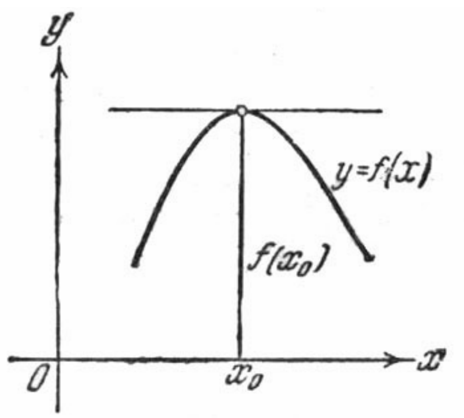

Рисунок 5

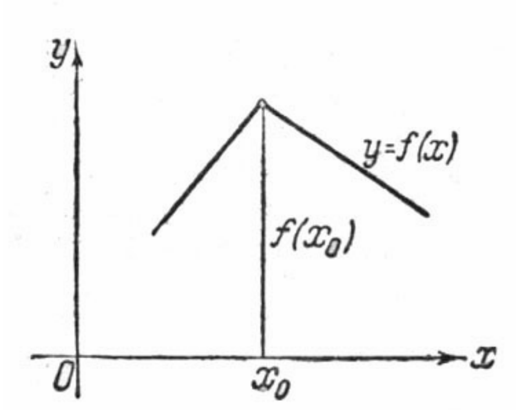

Рисунок 6

Теорема 4. (Достаточные условия экстремума). Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0, непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности, за исключением может быть самой точки x_0. Тогда если производная $f'(x)$

меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой экстремума. При этом, если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума; если с «–» на «+», то x_0 – точка минимума. Если знак производной при переходе через точку x_0 не меняется, то x_0 не является точкой экстремума.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками*. Из последней теоремы следует, что критические точки необязательно будут точками экстремума.

Теорема 5. (Общее условие существования экстремума). Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до *n*-го порядка включительно, причем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

и непрерывна в точке x_0. Тогда, если *n* – четное число, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно, максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если *n* – нечетное число, то функция $f(x)$ не имеет экстремум в точке x_0.

На практике часто применяется следствие из этой теоремы.

Следствие. Если для функции *f*(*x*) в точке x_0 первая производная $f'(x)$ равна нулю, а вторая производная $f''(x)$ отлична от нуля, т.е. $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то x_0 является точкой экстремума функции *f*(*x*), причем

1) если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума функции *f*(*x*);

2) если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума функции *f*(*x*).

. Выпуклость и вогнутость функции, точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ расположена выше любой касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$ на этом промежутке (см. рисунок 7).

График функции $f(x)$ называется *выпуклым* на промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой расположена ниже любой касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$ на этом промежутке (см. рисунок 8).

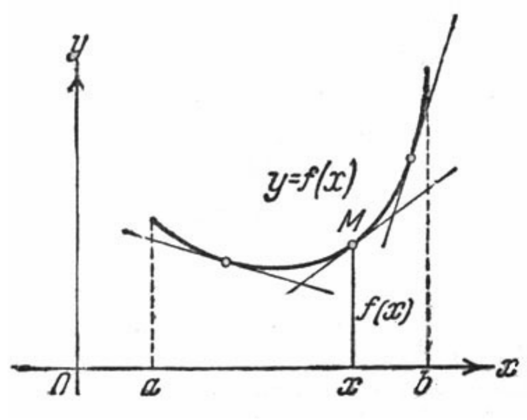

Рисунок 7

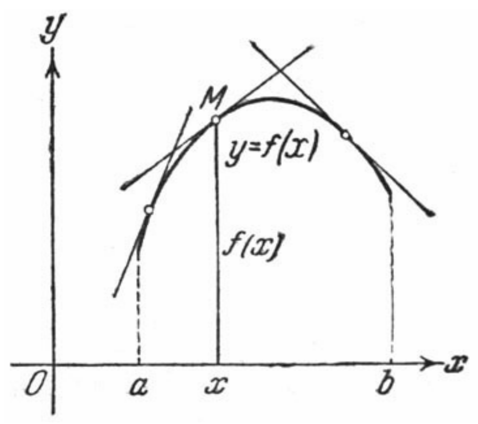

Рисунок 8

Теорема 6. (Достаточное условие выпуклости и вогнутости).

1) Если для функции $y = f(x)$ ее вторая производная непрерывна и положительна на интервале (a, b), то график этой функции вогнут на данном промежутке.

2) Если же вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и отрицательна внутри промежутка (a, b), то график этой функции будет выпуклым на этом промежутке.

Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции, если при переходе через эту точку кривая меняет вогнутость на выпуклость или наоборот (см. рисунок 9).

В точке перегиба касательная пересекает график функции. При этом касательная может пересекать график функции в некоторой точке x_0, но x_0 не является точкой перегиба, то есть в ней не меняется выпуклость на вогнутость (см. рисунок 10).

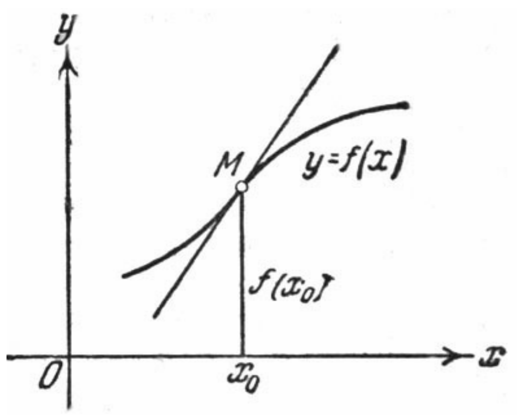

Рисунок 9

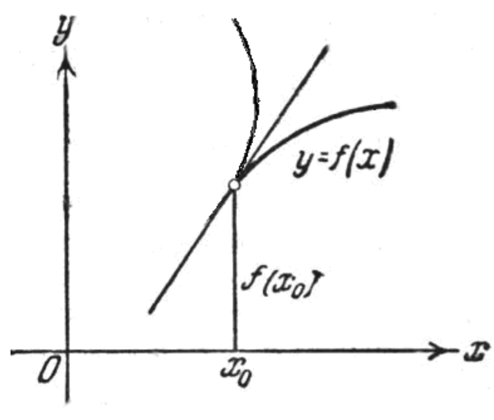

Рисунок 10

Теорема 7 (Необходимое условие точки перегиба). Если x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, то вторая производная в этой точке либо равна нулю, то есть $f''(x_0) = 0$, либо не существует.

Теорема 8. (Достаточное условие точки перегиба). Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме может быть самой точки x_0, и ее вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак на противоположный, то точка x_0 является точкой перегиба графика функции.

Можно привести еще одно достаточное условие точки перегиба без исследования смены знака второй производной.

Теорема 9. Если $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, причем, если $f'''(x_0) > 0$, то выпуклость меняется на вогнутость, и если $f'''(x_0) < 0$, то вогнутость меняется на выпуклость.

Асимптоты, общий план исследования функции

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* (см. рисунок 11) функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

Иными словами, прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой функции $f(x)$, если отклонение графика функции от этой прямой неограниченно уменьшается при $x \to \infty$.

Различают левые и правые асимптоты. Наклонная асимптота будет *левой*, если

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

и *правой*, если

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

При этом асимптота может быть левой и правой одновременно.

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) \qquad (1)$$

Если не существует или равен бесконечности хотя бы один из пределов в (1), то наклонной асимптоты не существует.

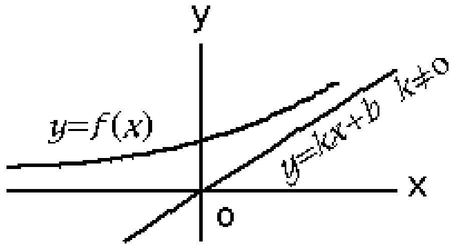

Рисунок 11

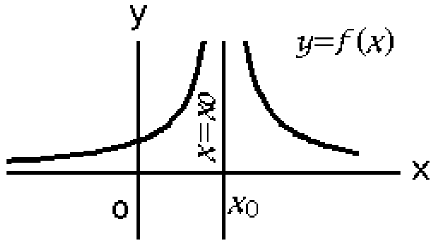

Рисунок 12

Частным случаем наклонной асимптоты является *горизонтальная асимптота* $y = b$, которая получается из наклонной при $k = 0$.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* (см. рисунок 12), если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty \qquad (2)$$

или (и)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty .$$

Обычно вертикальные асимптоты бывают в точках разрыва функции.

Приведем теперь *общий план исследования функции*.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функций; найти точки разрыва и определить их характер.
5. Исследовать поведение функции на границах области определения, найти асимптоты.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, найти точки перегиба.
8. Составить таблицу значений функции для некоторых значений ее аргумента.
9. Исследовать все полученные результаты, построить график функции.