Вычисление производных

1. Производная и ее геометрический и механический смысл.

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (12.1)$$

Используя определение производной, можно находить производную любой функции по схеме:

1) аргументу x даем приращение $\Delta x \neq 0$ и находим для функции y соответствующее значение $y + \Delta y$ в точке $x + \Delta x$;

2) получаем Δy;

3) составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) находим предел отношения при $\Delta x \to 0$, получаем производную $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Геометрический смысл: если $f(x)$ непрерывная функция в точке x_0, то производная функции в точке x_0 (если она существует) равна тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, в точке x_0. Причем функция имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует касательная к графику функции.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (12.2)$$

Уравнение нормали к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (12.3)$$

Механический смысл: если $f(t)$ выражает зависимость пройденного пути движущейся точки от времени t, то скорость точки есть производная от пути по времени: $v = f'(t)$.

2. Правила дифференцирования.

1) Производная константы равна нулю: $C' = 0$.

2) Константа выносится за знак производной: $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$.

3) Производная суммы функций: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

4) Производная произведения функций:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\,. \qquad (12.4)$$

5) Производная частного:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}\,. \qquad (12.5)$$

6) Пусть дана сложная функция $y = f(u)$, где $u = g(x)$ и пусть функция $u = g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u = g(x)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную в точке x и

$$y' = f'(u)\cdot g'(x) \qquad (12.6)$$

3. Производные основных элементарных функций.

1. $x' = 1,$	10. $\left(e^x\right)' = e^x,$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1},$	11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
3. $(\sin x)' = \cos x,$	12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
4. $(\cos x)' = -\sin x,$	13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$
5. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$	14. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},$
6. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},$	15. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x,$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},$	16. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x,$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},$	17. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x},$
9. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a,$	18. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

(12.7)

Примеры решения задач

1. Исходя из определения производной, вычислить $y'(8)$, если $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение: По определению производной (12.1) имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$y'(8) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8 + \Delta x} - \sqrt[3]{8}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + \Delta x - 8}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(8 + \Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \Delta x} + 4\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(8 + \Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \Delta x} + 4\right)} = \frac{1}{12}.$$

2. Найти производные следующих функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных:

а) $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - x^{-3} + \sqrt{7}$; б) $y = e^x \cos x + \frac{x^2}{\ln x}$.

Решение: а) используем правило дифференцирования суммы и производную константы, а также формулу 2 из таблицы производных (12.7):

$$y' = \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - x^{-3} + \sqrt{7}\right)' = \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' - (x^{-3})' + (\sqrt{7})' =$$

$$= 5(x^{-\frac{2}{3}})' - (x^{-3})' + (\sqrt{7})' = 5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} + 3x^{-4} + 0 = -\frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{3}{x^4};$$

б) используем правила дифференцирования произведения (12.4) и частного (12.5), а также формулы 2, 4, 8 и 10 из таблицы производных (12.7):

$$y' = (e^x \cos x)' + \left(\frac{x^2}{\ln x}\right)' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' + \frac{\left(x^2\right)' \ln x - x^2 \left(\ln x\right)'}{\ln^2 x} =$$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x + \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = e^x(\cos x - \sin x) + \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}.$$

3. Найти производные следующих функций, используя правило дифференцирования сложной функции:

а) $y = \arccos^2 x$; б) $y = \sqrt[3]{2x - 5e^{x^2}}$; в) $y = \operatorname{tg}^3 \ln\frac{x}{x+1}$.

Решение: а) используем правило дифференцирования сложной функции (12.6), а также формулу 12 из таблицы производных (12.7):

$$y' = (\arccos^2 x)' = 2\arccos x \cdot (\arccos x)' = 2\arccos x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}};$$

б) снова воспользуемся производной сложной функции (12.6):

$$y' = \left(\sqrt[3]{2x - 5e^{x^2}}\right)' = \left(\left(2x - 5e^{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(2x - 5e^{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(2x - 5e^{x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2x - 5e^{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(2 - 5e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)'\right) = \frac{2 - 10xe^{x^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(2x - 5e^{x^2}\right)^2}};$$

в) в этом примере необходимо использовать правило дифференцирования сложной функции (12.6) трижды, а в конце надо использовать правило дифференцирования дроби (12.5):

$$y' = (\operatorname{tg}^3 \ln\frac{x}{x+1})' = 3\operatorname{tg}^2 \ln\frac{x}{x+1} \cdot (\operatorname{tg} \ln\frac{x}{x+1})' =$$

$$= 3\operatorname{tg}^2 \ln\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)} (\ln\frac{x}{x+1})' =$$

$$= 3\operatorname{tg}^2 \ln\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' =$$

$$= 3\operatorname{tg}^2 \ln\frac{x}{x+1} \frac{1}{\cos^2\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2\ \ln\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\ln\dfrac{x}{x+1}\right)}\,\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3\mathrm{tg}^2\left(\ln\dfrac{x}{x+1}\right)}{\left(x^2+x\right)\cos^2\left(\ln\dfrac{x}{x+1}\right)}.$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение: Уравнения касательной и нормали к графику функции определяются формулами (12.2) и (12.3). Вычислим сначала значения функции и производной в точке x_0:

$$y_0 = y(2) = \frac{1}{2},$$

$$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)' = \frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+2\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2},$$

$$y'(2) = \frac{1}{3}.$$

Подставим найденные значения в формулу (12.2):

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x-2).$$

Получаем уравнение касательной: $2x - 6y - 1 = 0$.

Подставив теперь значения в формулу (12.3), получим уравнение нормали:

$$y - \frac{1}{2} = -3(x-2) \qquad \text{или} \qquad 6x + 2y - 13 = 0.$$