Производная неявной, параметрически заданной и сложно-степенной функции

1. Производная неявной функции.

Говорят, что уравнение $F(x,y)=0$ задает функцию $y=f(x)$ *неявно*, если существует множество E, такое что для любого $x\in E$ существует по крайней мере одно y, удовлетворяющее уравнению $F(x,y)=0$. Одно и то же уравнение может задавать не одну, а несколько функций.

Дифференцируя уравнение $F(x,y)=0$ по x и учитывая, что y зависит от x, можно найти производную y'.

2. Производная сложно-степенной функции.

Пусть дана функция $y=f(x)$. *Логарифмической производной* этой функции называется производная от натурального логарифма этой функции. А именно, $(\ln y)'_x=(\ln y)'_y\cdot y'=\dfrac{y'}{y}$.

Функция вида $y=u(x)^{v(x)}$ называется *сложно-степенной* или *сложно-показательной* функцией.

Для того чтобы продифференцировать ее, воспользуемся логарифмической производной. Имеем

$$\ln y=\ln\left(u(x)^{v(x)}\right)=v(x)\ln u(x),\qquad (\ln y)'=v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}.$$

Так как $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, то $y'=y\cdot(\ln y)'$. Следовательно,

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right),$$

или

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\ln u(x)v'(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x). \qquad (13.1)$$

3. Производная функции, заданной параметрически.

Говорят, что функция задана *параметрически*, если она задана уравнениями $\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ где t – параметр, пробегающий промежуток значений T.

Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют производные в окрестности некоторой точки t и $x'(t)\neq 0$. Тогда параметрически заданная функция имеет производную в этой точке, которая находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad \text{или} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{13.2}$$

Примеры решения задач

1. Найти производную функции *y*, заданную неявно уравнением $5x^3 + y^2 - 7xy = 0$.

Решение: Дифференцируем левую и правую части данного равенства по *x*:

$$(5x^3 + y^2 - 7xy)' = 0',$$

$$15x^2 + 2y \cdot y' - 7(x'y + xy') = 0,$$

$$15x^2 + 2y \cdot y' - 7(y + xy') = 0,$$

$$2y \cdot y' - 7xy' = 7y - 15x^2.$$

Теперь выразим производную из полученного равенства:

$$y' = \frac{7y - 15x^2}{2y - 7x}.$$

2. Пусть функция задана параметрически $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение: Воспользуемся формулой (13.2). Найдем $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$. Подставив в (13.2), получаем $y'_x = \frac{3t^2}{2t}$, или $y'_x = \frac{3}{2}t$.

3. Найти производные следующих функций, применяя предварительно логарифмирование:

а) $y = (\cos x)^{x^2}$; б) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2 \cdot (3-x)^5}}$.

Решение: а) Эта функция является сложно-степенной. Прологарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(\cos x)^{x^2}, \qquad \ln y = x^2 \ln(\cos x).$$

Теперь возьмем производную от левой и правой частей:

$$(\ln y)' = (x^2 \ln(\cos x))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (x^2)' \ln(\cos x) + x^2 (\ln(\cos x))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2x \ln(\cos x) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot(-\sin x).$$

Выразим производную из полученного равенства и подставим вместо y его выражение:

$$y' = (2x \ln(\cos x) - x^2 \operatorname{tg} x)\cdot y,$$

$$y' = (2x \ln(\cos x) - x^2 \operatorname{tg} x)\cdot(\cos x)^{x^2}.$$

б) Производную этой функции можно находить непосредственно, применяя правила дифференцирования произведения и частного. Но предварительное логарифмирование значительно облегчает взятие производной.

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2\cdot(3-x)^5}},$$

$$\ln y = \ln \sqrt{x-1} - \ln \sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2} - \ln(3-x)^5,$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln\left(x^2+2\right) - 5\ln(3-x),$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln\left(x^2+2\right) - 5\ln(3-x)\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x},$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x}\right)\cdot y,$$

$$y' = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2 \cdot (3-x)^5}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} + \frac{5}{3-x}\right).$$

4. Найти производную функции $y = (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}}$.
Решение: Воспользуемся формулой (13.1):

$$y' = (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}} \cdot \ln(x^3+4) \cdot (\ln\sin\sqrt{x})' + \ln\sin\sqrt{x} \cdot (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}-1} \cdot (x^3+4)' =$$

$$= (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}} \cdot \ln(x^3+4) \cdot \frac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \ln\sin\sqrt{x} \cdot (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}-1} \cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}} \cdot \ln(x^3+4) \cdot \frac{ctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 3x^2 \cdot \ln\sin\sqrt{x} \cdot (x^3+4)^{\ln\sin\sqrt{x}-1}.$$