Производные высших порядков. Дифференциал функции. Приложения дифференциалов

1. Производные высших порядков.

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если $f'(x)$ также дифференцируема в точке x_0, то значение выражения $\left(f'(x_0)\right)'$ называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

По индукции определяется *производная n–го порядка* в точке x_0, как производная от производной (n – 1)-го порядка и обозначается $f^{(n)}(x_0)$ или $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

Пусть дана сложная функция $z = f(u)$, где $u = g(x)$, причем функции $z = f(u)$ и $u = g(x)$ имеют производные 1-го и 2-го порядков. Тогда сложная функция $z = F(x) = f(g(x))$ так же имеет вторую производную. Поскольку $z'_x = f'(u)\cdot g'(x)$, то

$$z''_{xx} = \left(f'(u)\right)'_x \cdot g'(x) + f'(u)\cdot g''(x) = f''(u)\cdot g'(x)\cdot g'(x) + f'(u)\cdot g''(x).$$

Следовательно,

$$z''_{xx} = f''(u)\cdot\left(g'(x)\right)^2 + f'(u)\cdot g''(x) \qquad (14.1)$$

Аналогично вычисляются производные 3-го и высших порядков сложной функции.

Пусть функция задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Если существуют вторые производные $x''(t)$ и $y''(t)$, то существует и y''_{xx}. Действительно, так как $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, то

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_x = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{\left(x'(t)\right)^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}.$$

Отсюда получаем

$$y''_{xx} = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3} \qquad (14.2)$$

Аналогично можно находить производные 3-го и высших порядков от функции, заданной параметрически.

2. Дифференциал функции.

Из определения производной $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует равенство $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$, где ε является бесконечно малой величиной.

Величина $f'(x)\Delta x$ называется *дифференциалом функции* $f(x)$ и обозначается dy.

Величина Δx называется *дифференциалом независимой переменной* и обозначается $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал функции вычисляется по формуле:

$$dy = f'(x)dx \qquad (14.3)$$

Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x. Дифференциал от дифференциала этой функции в точке x называется *дифференциалом второго порядка*:

$$d^2 f(x) = d\left(df(x)\right) = f''(x)dx^2 \qquad (14.4)$$

Если $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x, то по индукции можно определить *дифференциал n–го порядка* функции $f(x)$ в точке x:

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right) = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (14.5)$$

Формулы (14.4) и (14.5) справедливы, только если x является независимой переменной.

Рассмотрим сложную функцию: $z = z(y)$, где $y = y(x)$. Найдем дифференциал второго порядка сложной функции. Так как $dz = z'_y dy$, то имеем

$$d^2 z = d(dz) = d\left(z'_y dy\right) = d\left(z'_y\right)\cdot dy + z'_y\cdot d(dy) = z''_{yy}dy\cdot dy + z'_y\cdot d^2 y,$$

следовательно, получаем формулу второго дифференциала сложной функции:

$$d^2 z = z''_{yy}dy^2 + z'_y\cdot d^2 y \qquad (14.6)$$

3. Формула приближенного вычисления.

Если Δx мало, то приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ отличается от дифференциала $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx. Отсюда имеем приближенное равенство

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) \qquad \text{или} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x .$$

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{14.7}$$

Это и есть *формула приближенного вычисления*.

Примеры решения задач

1. Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

Решение: а) Найдем сначала производную первого порядка:

$$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$

а затем производную второго порядка:

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$$

б) Находим производную первого порядка и затем второго:

$$y' = (\ln\sqrt[3]{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot (\sqrt[3]{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1+x^2};$$

$$y'' = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

2. Найти производную n-го порядка от функции $y = \log_3(x + 5)$.

Решение: Находим последовательно несколько производных данной функции:

$$y' = (\log_3(x+5))' = \frac{1}{(x+5)\ln 3} \cdot (x+5)' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x+5},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{x+5}\right)' = \frac{1}{\ln 3}\cdot\left(\frac{1}{x+5}\right)' = -\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{(x+5)^2},$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{(x+5)^2}\right)' = -\frac{1}{\ln 3}\cdot\left(\frac{1}{(x+5)^2}\right)' = \frac{2}{\ln 3}\cdot\frac{1}{(x+5)^3},$$

$$y^{IV} = \left(\frac{2}{\ln 3}\cdot\frac{1}{(x+5)^3}\right)' = \frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{1}{(x+5)^3}\right)' = -\frac{6}{\ln 3}\cdot\frac{1}{(x+5)^4},$$

Можно заметить закономерность и доказать формулу n-й производной методом математической индукции.

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+5)^n \ln 3}.$$

3. Найти y'' в точке $(0;\,1)$, если функция y задана неявно уравнением $x^4 - xy + y^4 = 1$.

Решение: Дифференцируем данное уравнение по x и находим первую производную:

$$4x^3 - (x'y + xy') + 4y^3\cdot y' = 0,$$

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3\cdot y' = 0,$$

$$y' = \frac{y-4x^3}{4y^3-x}.$$

Теперь находим вторую производную:

$$y'' = \frac{\left(y-4x^3\right)'\cdot\left(4y^3-x\right)-\left(y-4x^3\right)\cdot\left(4y^3-x\right)'}{\left(4y^3-x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(y'-12x^2\right)\left(4y^3-x\right)-\left(y-4x^3\right)\left(12y^2\cdot y'-1\right)}{\left(4y^3-x\right)^2}.$$

Подставляя вместо y' его значение, получим:

$$y'' = \frac{\left(\frac{y-4x^3}{4y^3-x}-12x^2\right)\left(4y^3-x\right)-\left(y-4x^3\right)\left(12y^2\cdot\frac{y-4x^3}{4y^3-x}-1\right)}{\left(4y^3-x\right)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{y-4x^3}{\left(4y^3-x\right)^2}-\frac{12x^2}{4y^3-x}-12y^2\cdot\frac{\left(y-4x^3\right)^2}{\left(4y^3-x\right)^3}.$$

Значение y'' в точке (0; 1) равно $-\frac{1}{16}$.

4. Найти y'''_{xxx} от функции $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

Решение: $$y'_x = \frac{\left(e^{-t}\sin t\right)'_t}{\left(e^{-t}\cos t\right)'_t} = \frac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t};$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}\right)'_t}{\left(e^{-t}\cos t\right)'_t} = -\frac{2}{e^{-t}\left(\sin t+\cos t\right)^3};$$

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(-\frac{2}{e^{-t}\left(\sin t+\cos t\right)^3}\right)'_t}{\left(e^{-t}\cos t\right)'_t} = \frac{8\sin t-4\cos t}{e^{-2t}\left(\sin t+\cos t\right)^5}.$$

5. Найти дифференциал dy, если $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$.

Решение: Используем формулу (14.3):

$$dy = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}\right)' dx =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{1}{6} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \right) dx =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{2+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{x^2}{x^4+x^2-2} dx.$$

6. Насколько приблизительно изменится сторона квадрата, если площадь его увеличилась от 9 $м^2$ до 9,1 $м^2$?

Решение: Пусть y – сторона квадрата, x – площадь квадрата, тогда

$$y = \sqrt{x}.$$

По условию задачи: $x = 9$, $\Delta x = 0{,}1$. Приращение стороны квадрата вычисляем приближенно по формуле, которая получается из (14.7):

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

$$f(9{,}1) - f(9) = \Delta f(x) \approx f'(9) \cdot 0{,}1$$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(9) = \dfrac{1}{6}$, тогда $\Delta y \approx \dfrac{1}{6} \cdot 0{,}1 = 0{,}016$ *м*.

7. Найти приближенное значение arctg 1,05.

Решение: Воспользуемся формулой (14.7). Обозначим $x = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}05$. Так как $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то $f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Подставляем все данные в формулу (14.7):

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 = 0{,}81.$$

8. Найти d^3y, если $y = e^{x+x^2} + \dfrac{1}{x}$.

Решение: $dy = y'dx = \left(e^{x+x^2} + \dfrac{1}{x}\right)' dx = \left((1+2x)e^{x+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) dx,$

$$d^2y = y''dx^2 = \left((1+2x)e^{x+x^2} - \frac{1}{x^2}\right)' dx^2 =$$

$$= \left((1+2x)' e^{x+x^2} + (1+2x)(e^{x+x^2})' - \left(\frac{1}{x^2} \right)' \right) dx^2 =$$

$$= \left(2e^{x+x^2} + (1+2x)^2 e^{x+x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx^2 = \left(\left(4x^2 + 4x + 3 \right) e^{x+x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx^2,$$

$$d^3 y = y''' dx^3 = \left(\left(4x^2 + 4x + 3 \right) e^{x+x^2} + \frac{2}{x^3} \right)' dx^3 =$$

$$= \left(\left(4x^2 + 4x + 3 \right)' e^{x+x^2} + (4x^2 + 4x + 3) \left(e^{x+x^2} \right)' + \left(\frac{2}{x^3} \right)' \right) dx^3 =$$

$$= \left(\left(8x + 4 \right) e^{x+x^2} + (4x^2 + 4x + 3)(1+2x) e^{x+x^2} - \frac{6}{x^4} \right) dx^3 =$$

$$= \left(\left(8x^3 + 12x^2 + 18x + 7 \right) e^{x+x^2} - \frac{6}{x^4} \right) dx^3.$$