Правило Лопиталя. Точки экстремума функции.

1. Правило Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением может быть самой точки a (a – число или ∞). Причем $g'(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ в любой точке этой окрестности и выполнено одно из условий:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \qquad (15.1)$$

(A – число или ∞).

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Правило Лопиталя можно применять несколько раз подряд, но только конечное число раз, пока не исчезнет неопределенность. Остальные виды неопределенностей приводятся к ним следующим образом:

1) $(\infty-\infty)$. Преобразование $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{1\Big/f(x)g(x)}$ дает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

2) $(0\cdot\infty)$. Преобразование $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{1\Big/g(x)}$ дает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, если $f(x)$ – бесконечно малая функция, а $g(x)$ бесконечно большая, или неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, в противном случае.

3) $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$. Преобразуем функцию следующим образом $f\left(x\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}$, тогда в степени получим неопределенность вида $(0\cdot\infty)$.

2. Возрастание и убывание функции.

Если производная дифференцируемой функции строго положительна внутри некоторого промежутка, т.е. $f'(x) > 0$, то функция строго монотонно возрастает на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции строго отрицательна внутри некоторого промежутка, т.е. $f'(x) < 0$, то функция строго монотонно убывает на этом промежутке.

3. Точки экстремума функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума* (рис. 15.1) (*минимума* (рис. 15.2)) функции $f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки, такая, что $\forall x \in U(x_0) \quad f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$.

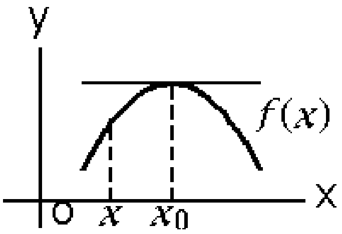


Рис. 15.1

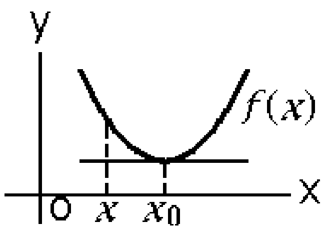
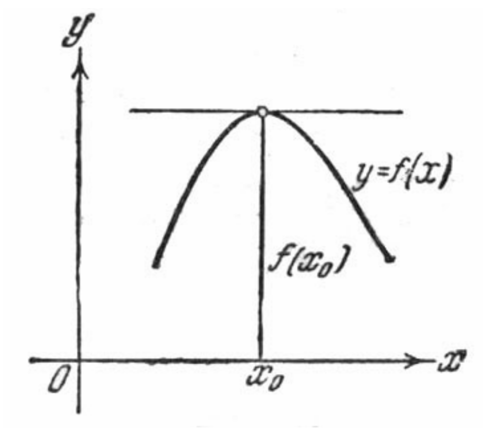


Рис. 15.2

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Необходимое условие экстремума. Пусть функция непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет экстремум в этой точке. Тогда производная функции в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Геометрически это означает, что в точке экстремума функции $y=f(x)$ касательная к ее графику либо параллельна оси OX (как на рисунке 15.3), либо не существует (как на рисунке 15.4).



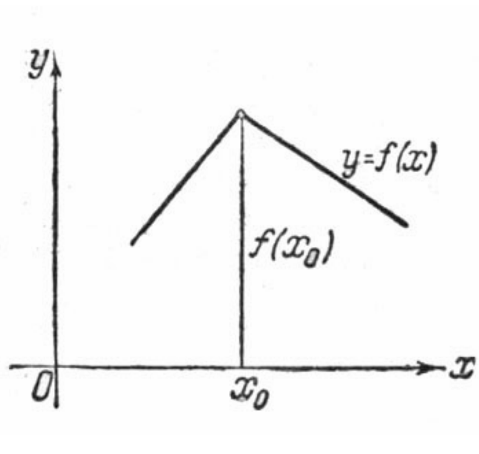


Рис. 15.3 Рис. 15.4

Достаточные условия экстремума. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0, непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности, за исключением может быть самой точки x_0. Тогда если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой экстремума. При этом, если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума; если с «–» на «+», то x_0 – точка минимума. Если знак производной при переходе через точку x_0 не меняется, то x_0 не является точкой экстремума.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками*. Из последней теоремы следует, что критические точки необязательно будут точками экстремума.

Общее условие существования экстремума. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно, причем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n – четное, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n – нечетное, то функция $f(x)$ не имеет экстремум в точке x_0.

На практике часто применяется следствие из этого утверждения:

Если для функции $f(x)$ в точке x_0 первая производная $f'(x)$ равна нулю, а вторая производная $f''(x)$ отлична от нуля, т.е. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, причем

1) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$;

2) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

Примеры решения задач

1. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{x}{3}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Решение: В первых двух примерах используем формулу (15.1):

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-1+\ln x)'}{(e^x-e\ )'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{4}{e}.$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(tg(\frac{\pi x}{2}))'}{(\ln(1-x))'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\pi}{2}(x-1)'}{(\cos^2(\frac{\pi x}{2}))'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)}=\infty.$

В следующих двух примерах выполним сначала преобразования, а затем применим формулу (15.1):

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{tgx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(tgx)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos x=0.$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x(2+x)}=\dfrac{1}{2}.$

д) Здесь имеем неопределенность вида $\left(0^0\right)$. Обозначим данную функцию через y, т.е. $y=(\sin x)^{\frac{x}{3}}$, и прологарифмируем ее:

$$\ln y=\frac{x}{3}\ln \sin x.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (15.1):

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3}\ln\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\dfrac{3}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln\sin x)'}{\left(\dfrac{3}{x}\right)'}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\sin x}=$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1.$

е) Здесь неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. Представим сложно-степенную функцию в виде экспоненты, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln x\ln(1+x)} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\ln x\ln(1+x)\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-x\ln^2 x}{1+x}\right) =$$

$$\exp\left(-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}}\right) = \exp\left(-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}\right) = \exp\left(2\lim_{x\to 0}x\ln x\right) =$$

$$= \exp\left(2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \exp\left(2\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right) = \exp\left(-2\lim_{x\to 0}x\right) = e^0 = 1.$$

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = (2-x)(x+1)^2$.

Решение: Найдем производную:

$$y' = ((2-x)(x+1)^2)' = -3x^2 + 3.$$

Очевидно, что $y' > 0$ в интервале $(-1;\ 1)$ и $y' < 0$ в интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$. Таким образом, в интервале $(-1;\ 1)$ данная функция возрастает, а в интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ – убывает.

3. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-5)e^x$.

Решение: Находим производную: $y' = (x-4)e^x$. Приравниваем ее к нулю и находим стационарную точку: $(x-4)e^x = 0$, $x = 4$. Очевидно, что при переходе через точку $x = 4$ производная меняет знак с «–» на «+».

Следовательно, используя достаточное условие экстремума, заключаем, что в точке $x = 4$ функция имеет минимум $y_{\min} = -e^4$.

4. Исследовать на экстремум функцию $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Решение: Функция определена при $-1 \le x \le 1$. Найдем производную: $y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Найдем точки, где производная равна нулю или не существует:

$$1 - 2x^2 = 0 \quad \text{или} \quad 1 - x^2 = 0.$$

Получаем четыре критические точки: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Найдем вторую производную: $y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Вычислим значения второй производной в критических точках.

При $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $y''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3}} < 0$, следовательно, согласно общему условию существования экстремума, заключаем, что в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ функция имеет максимум $y_{\max} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

При $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ получим $y''\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3}} > 0$, т. е. в точке $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ функция имеет минимум $y_{\min} = -\dfrac{1}{2}$.

В критических точках $x = \pm 1$ экстремума нет, так как по определению точками экстремума могут быть лишь внутренние точки области определения функции.

5. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-1)^4$.

Решение: Найдем производную: $y' = 4(x-1)^3$, приравняем ее к нулю: $(x-1)^3 = 0$, получаем критическую точку $x = 1$. Вторая производная $y'' = 12(x-1)^2$ при $x = 1$ равна нулю. Третья производная $y''' = 24(x-1)$ при $x = 1$ также обращается в нуль. Четвертая производная $y^{IV} = 24 > 0$. Следовательно, согласно общему условию существования экстремума, заключаем, что в точке $x = 1$ функция имеет минимум $y_{\min} = 0$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке [—2, 3].

Решение: Находим производную: $f'(x) = 3 - 3x^2$, находим критические точки: $3 - 3x^2 = 0$, т. е. $x = \pm 1$. Вычислим значения функции в этих точках и на границе отрезка: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно –18.

7. Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение: Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота равна y. Тогда

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right).$$

Следовательно, объем цилиндра выразится так:

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

Задача сводится к исследованию функции $V(x)$ на максимум при $x > 0$.

Найдем производную $\frac{dV}{dx} = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ и приравняем ее к нулю, откуда получаем критическую точку $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Найдем вторую производную: $\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x$. Так как при $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ выполняется условие $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, то объем имеет наибольшее значение в найденной критической точке, причем

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} \text{ или } y = 2x,$$

т. е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом.