Исследование функций и построение графиков

1. Выпуклость и вогнутость функции.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ расположена выше любой касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$ на этом промежутке (см. рис. 16.1).

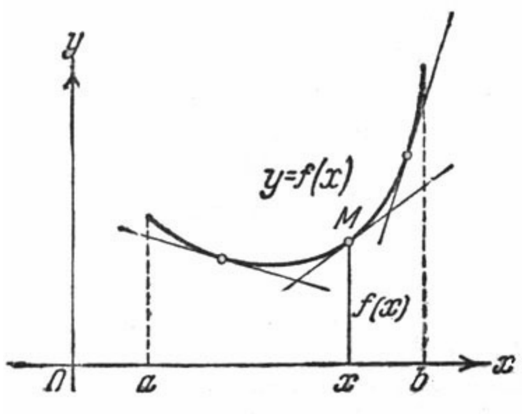


Рис. 16.1

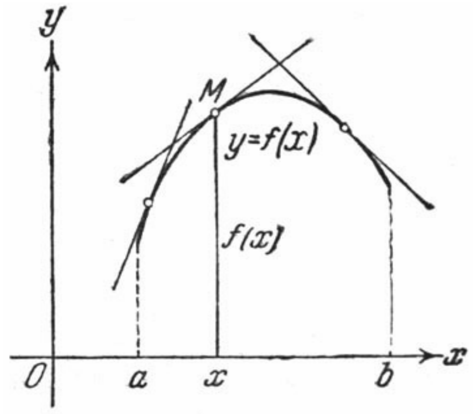


Рис. 16.2

График функции $f(x)$ называется *выпуклым* на промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой расположена ниже любой касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$ на этом промежутке (см. рис. 16.2).

Достаточное условие выпуклости и вогнутости.

1) Если для функции $y = f(x)$ ее вторая производная $f''(x_0)$ непрерывна и положительна на интервале (a, b), то график этой функции вогнут на данном промежутке.

2) Если же вторая производная $f''(x_0)$ непрерывна и отрицательна внутри промежутка (a, b), то график функции $y = f(x)$ будет выпуклым на этом промежутке.

2. Точки перегиба функции.

Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции, если при переходе через эту точку кривая меняет вогнутость на выпуклость или наоборот (см. рис. 16.3).

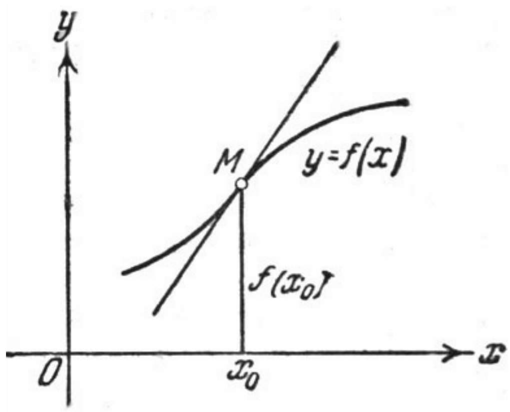


Рис. 16.3

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, то вторая производная в этой точке либо равна нулю, т.е. $f''(x_0)=0$, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме может быть самой точки x_0, и ее вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак на противоположный, то точка x_0 является точкой перегиба графика функции.

Можно привести еще одно достаточное условие точки перегиба без исследования смены знака второй производной.

Если $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, причем, если $f'''(x_0)>0$, то выпуклость меняется на вогнутость, и если $f'''(x_0)<0$, то вогнутость меняется на выпуклость.

3. Асимптоты функции.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* (см. рис. 16.4) функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$. Иными словами, прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой функции $f(x)$, если отклонение графика функции от этой прямой неограниченно уменьшается при $x\to\infty$.

Различают левые и правые асимптоты.

Наклонная асимптота называется *левой*, если $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$, и *правой*, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$. При этом асимптота может быть левой и правой одновременно.

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся по формулам:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \tag{16.1}$$

Если не существует или равен бесконечности хотя бы один из пределов в (16.1), то наклонной асимптоты не существует.

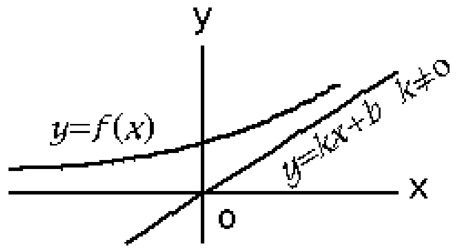


Рис. 16.4

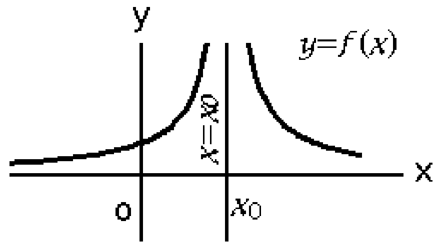


Рис. 16.5

Частным случаем наклонной асимптоты является *горизонтальная асимптота* $y = b$, которая получается из наклонной при $k = 0$.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* (см. рис. 16.5), если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$ или (и) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$.

Обычно вертикальные асимптоты бывают в точках разрыва функции.

4. Общий план исследования функции и построение графика.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функций; найти точки разрыва и определить их характер.
5. Исследовать поведение функции на границах области определения, найти асимптоты.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, найти точки перегиба.
8. Составить таблицу значений функции для некоторых значений ее аргумента.
9. Исследовать все полученные результаты, построить график функции.

Примеры решения задач

1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = xe^x$.

Решение: Находим

$$y' = (xe^x)' = e^x + xe^x, \quad y'' = (e^x + xe^x)' = 2e^x + xe^x = e^x(2 + x).$$

Вторая производная существует на всей числовой оси. Причем $y'' = 0$ при $x = -2$. Тогда, если $x < -2$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла в интервале $(-\infty; -2)$; если же $x > -2$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута в интервале $(-2; +\infty)$.

2. Найти точки перегиба кривой $y = (x-5)^{\frac{5}{3}} + 2$.

Решение: Находим

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}}, \qquad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$. При переходе через точку $x = 5$ вторая производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, эта точка является точкой перегиба.

3. Найти асимптоты следующих кривых:

а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; в) $y = x^2 e^{-x}$.

Решение:

а) Функция имеет точку разрыва $x = -2$. Поскольку $y \to \infty$ при $x \to -2$, то $x = -2$ является вертикальной асимптотой. Найдем наклонные асимптоты. Для этого воспользуемся формулами (16.1):

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} - x\right] = -4.$$

Таким образом, наклонная асимптота имеет уравнение $y = x - 4$.

б) Функция определена в интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to 2+0} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = +\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой кривой. Определим, существуют ли наклонные асимптоты. Находим:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - k_1 x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1.$$

Таким образом, существует правая наклонная асимптота $y = x + 1$;

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{-1}$$

(здесь мы разделили числитель и знаменатель на положительную величину $-|x|$), тогда

$$k_2 = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\sqrt{-x}-\sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)} = -1.$$

Итак, существует левая наклонная асимптота $y = -x - 1$.

в) Очевидно, вертикальных асимптот нет.

Если $x \to \infty$, то $y \to 0$. Следовательно, ось Ox является горизонтальной асимптотой данной кривой. Определим, существует ли наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0.$$

Таким образом, имеется только горизонтальная асимптота $y = 0$.

4. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение: Выполним все операции известной схемы исследования функции.

Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а график из трех ветвей.

Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0; 0)$; если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0; 0)$.

Функция знакоположительна ($y > 0$) в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$; знакоотрицательна – в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

Функция $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0 \ \ (k = 0 \text{ при } x \to +\infty \text{ и при } x \to -\infty),$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y = 0$. Прямая $y = 0$ является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2},$$

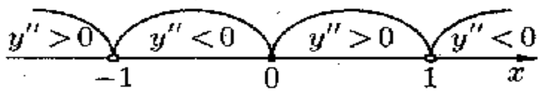
то $y' > 0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

Исследуем функцию на экстремум. Так как $y' = \dfrac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость. Находим y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2} \right)' = \frac{2x(1-x^2)^2 - \left(x^2+1\right)\cdot 2\left(1-x^2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0, x_2 = -1$ и $x_3 = 1$.



Точка $O(0;\ 0)$ – точка перегиба графика функции. График выпуклый на интервалах $(-1;\ 0)$ и $(1;\ \infty)$; вогнутый на интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1)$.

График функции изображен на рисунке (16.6).

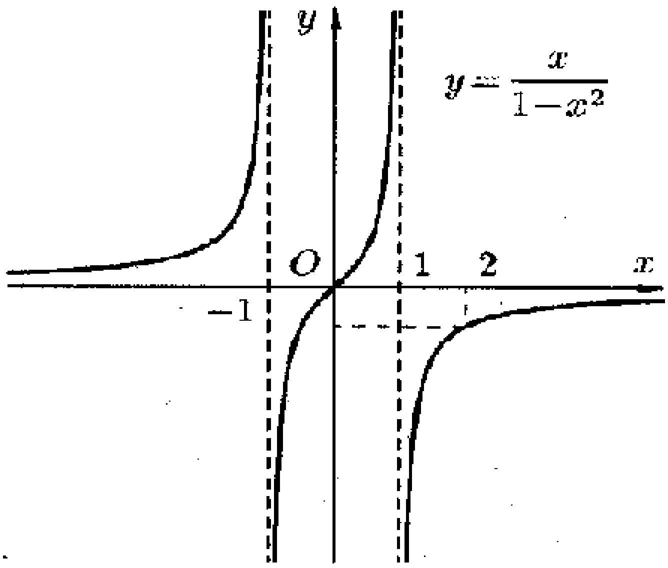


Рис. 16.6

5. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x-2}$ и построить ее график.

Решение. Проведем исследование в соответствии со схемой.

Область определения функции: $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной.

Найдем точки пересечения: подставим в функцию $x=0$, получим $y=\dfrac{1}{2}$. Далее решим уравнение $x^2+2x+1=0$, получим $x=-1$. Таким образом, график пересекает координатные оси в точках $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ и $(-1{,}0)$. Очевидно, $x = 2$ – точка разрыва функции. Отметим интервалы знакопостоянства функции: $(-\infty,-1)$ и $(-1,\ 2)$ – здесь функция принимает лишь отрицательные значения; $(2,+\infty)$ – здесь функция принимает положительные значения.

График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, т.к.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=\infty.$$

Горизонтальной асимптоты нет, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}=\infty.$

Найдем коэффициенты наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x(x-2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

Следовательно, $y = x + 4$ – наклонная асимптота.

Определим интервалы возрастания и убывания функции. Для этого найдем производную функции:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}\right)'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Таким образом, критические точки: $x=-1$, $x=5$ и $x=2$. Определим промежутки знакопостоянства производной:

$$f'(x)>0 \text{ при } x<-1,\ x>5;$$

$$f'(x)<0 \text{ при } -1<x<2,\ 2<x<5.$$

Значит, функция возрастает на лучах $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$ и убывает на промежутках $[-1,2)\cup(2,5,]$.

Найдем точки экстремума функции:

$x=-1$ – точка максимума, $y=0$;
$x=\ 5$ – точка минимума, $y=12$.

Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость. Для этого найдем вторую производную данной функции:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)\left(x^2-4x-5\right)}{(x-2)^4}=\frac{18}{(x-2)^3};$$

Определим промежутки знакопостоянства второй производной:

$f''(x)>0$ при $x>2$ – график функции вогнутый;
$f''(x)<0$ при $x<2$ – график функции выпуклый.

Точек перегиба данная функция не имеет.

Составим таблицу значений функции для некоторых значений аргумента.

x	-4	-1	0	1	5
$f(x)$	-1,5	0	-0,5	-4	12

График функции изображен на рисунке (16.7).

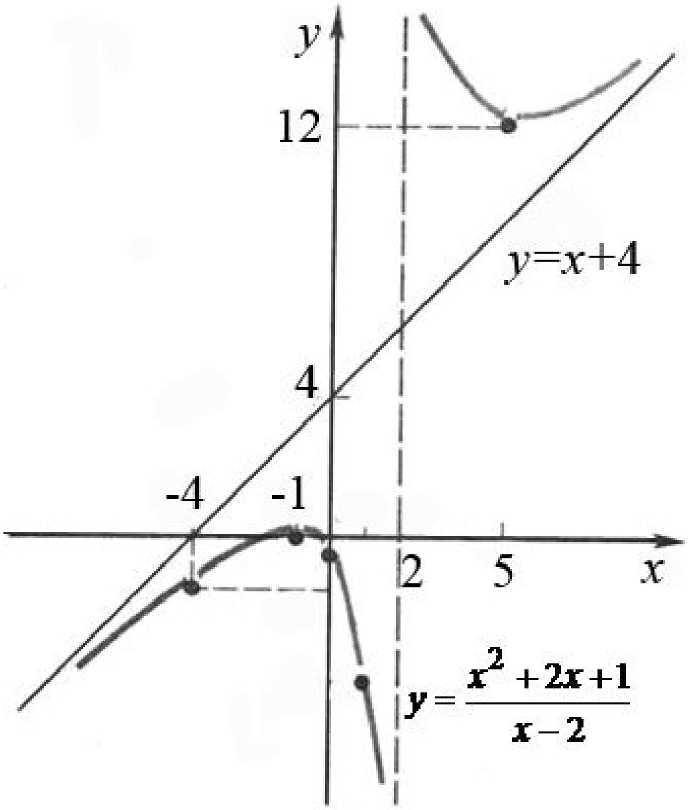


Рис. 16.7