Задачи для самостоятельного решения по теме практического занятия 12

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава V, § 20 и [2]: глава 7, § 1 (см. прилагаемый список литературы)

1. Закон движения точки есть $s = 2t^2 + 3t + 5$, где расстояние s дается в сантиметрах и время t – в секундах. Чему равна средняя скорость точки за промежуток времени от $t = 1$ до $t = 5$?

2. Найти производную x'_y, если $y = x^3 + \ln\frac{1}{x}$.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, б) $y = \sin(\sqrt{7} + \sqrt{x})$,

в) $y = \ln\ln^2\ln^3 x$, г) $y = arctg\frac{tg\frac{x}{2} - ctg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$

д) $y = \frac{x^2\sin x}{x^3+1}$, е) $y = \frac{2}{3}\operatorname{cth} x - \frac{chx}{3sh^3x}$,

ж) $y = \frac{1}{3}\cos\operatorname{tg} 2 + e^{\log_5 x}$, з) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$,

и) $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}$, к) $y = x^4\cos\alpha + \sin\alpha\ln\sin(x - \alpha)$.

4. Найти производные следующих функций:

а) $y = arctg\frac{1+x}{1-x}$; б) $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$;

в) $y = \ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2arctg\sqrt{\sin x}$; г) $y = \log_{16}\log_5\operatorname{tg} x$;

д) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$; е) $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$;

ж) $y = 2^{\cos(x^3\ln\frac{1}{x})}$; з) $y = \ln(\arccos(x + 1))$;

и) $y = \cos^2\sqrt{4-x^2}$; к) $y = x^3(\ln\sqrt{x+1}) - \sin e^{\frac{x}{4}}$;

л) $y = \frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}$; м) $y = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:

а) $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$ в точке пересечения с осью OX;

б) $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения с прямой $y = 1$.

6. Показать, что функция $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ удовлетворяет уравнению xy' = = $y(y\ln x - 1)$.

Ответы:

1) 15 см/сек; **2)** $x'_y = \frac{x}{3x^3-1}$; **3)** а) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$;

б) $\frac{\cos(\sqrt{7}+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{6}{x\ln\ln^3 x\cdot\ln x}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{\sin^2 x\left(tg^2\frac{x}{2}+ctg^2\frac{x}{2}\right)}$;

д) $\frac{x(2\sin x + x\cos x)}{x^3+1} - \frac{3x^4\sin x}{\left(x^3+1\right)^2}$; е) $\frac{cth^2 x-1}{sh^2 x}$; ж) $\frac{e^{\log_5 x}}{x\ln 5}$; з) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$;

и) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)\right)$;

к) $4x^3\cos\alpha + \sin\alpha\cdot ctg(x-\alpha)$; **4)** а) $-\frac{1}{1+x^2}$; б) $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$;

в) $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$; г) $\frac{2}{\ln 80\cdot\log_5 tgx\cdot\sin 2x}$; д) $\frac{8(x-1)^3}{(x+1)^5}$; е) $\frac{2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$;

ж) $-2^{\cos(x^3\ln\frac{1}{x})}\sin\left(x^3\ln\frac{1}{x}\right)\left(3x^2\ln\frac{1}{x}-x^2\right)$; з) $-\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}\cdot\arccos(x+1)}$;

и) $\frac{x\sin 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$; к) $3x^2\ln\sqrt{x+1}+\frac{x^3}{2x+2}-\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\cos e^{\frac{x}{4}}$; л) $\frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot\ln\frac{32e}{81}$;

м) $\frac{1}{\sin^3 x}$; **5)** 1) $x-2y-1=0$, $2x+y-2=0$; 2) $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ для точки (1; 1), $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$ для точки (–1; 1).