Задачи для самостоятельного решения по теме практического занятия 13

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава V, § 21-22 и [2]: глава 7, § 1 (см. прилагаемый список литературы)

1. Найти производную от неявных функций y:

а) $e^y = x + y$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$;

в) $\sqrt{x^2 - y^2} = 3\arcsin\dfrac{y}{x}$; г) $x^y = y^x$.

2. Найти производные y' заданных функций y в указанных точках:

а) $(x + y)^3 = 27(x - y)$ при $x = 2$ и $y = 1$;

б) $ye^y = e^{x+1}$ при $x = 1$ и $y = 1$.

3. Найти производную y'_x заданных функций:

а) $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = arctge^{\frac{t}{2}}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1 - \sin t}{1 + \sin t}}, \\ y = \dfrac{1}{2}tg^2 t + \ln\cos t. \end{cases}$

4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

$$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, t_0 = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

5. Найти производные следующих функций, применяя предварительное логарифмирование функции:

а) $y = (\cos x)^{\sin x}$; б) $y = \dfrac{(x - 2)^9}{\sqrt{(x - 1)^5 (x - 3)^{11}}}$;

в) $y = x^{x^x}$; г) $y = x^5 (\lg x)\sqrt[3]{x + 1}$.

6. Найти производные следующих функций:

а) $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$; б) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$;

в) $x + \ln \dfrac{y}{x} = y^2$ при $x = 1$ и $y = 1$.

7. Найти производную y'_x заданных функций:

а) $\begin{cases} x = t + \sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2+1}). \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{2-t^2}, \\ y = \arccos(t-1). \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = ctg(2e^t), \\ y = \ln tg(e^t). \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \dfrac{3t^3+t}{2t^2+1}, \\ y = \sin(\dfrac{t^3}{3} + 2t). \end{cases}$

8. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y^4 = 4x^4 + 6xy$ в точке (1; 2).

9. Применяя предварительно логарифмирование функции, найти производные следующих функций:

а) $y = (tgx)^{e^x}$; б) $y = (2^x)^{\ln x} + 3^{\ln 2}$

в) $y = \sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$; г) $y = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

10. Найти y' функций y, пользуясь формулой для нахождения производной сложно-степенной функции:

а) $y = x^{\ln(x^2+1)}$; б) $y = (\arccos 3x)^{\sin x}$;

в) $y = (\mathrm{tg}2x)^{ctg(x/2)}$ г) $y = (2e^x + 1)^{\ln x}$.

Ответы:

1) а) $y' = \dfrac{1}{e^y - 1} = \dfrac{1}{x+y-1}$; б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; в) $y' = \dfrac{x^2+3y}{3x-xy}$; г) $y' = \dfrac{\ln y - y/x}{\ln x - x/y}$;

2) а) 0; б) $\dfrac{e}{2}$; **3)** а) 1; б) $-\dfrac{1}{t}$; в) $e^{\frac{t}{2}}\sqrt{1+e^t}$; г) $-\mathrm{tg}^3 t\cos t$; **4)** $4\sqrt{3}x + 4y - 5a = 0$, $4x - 4\sqrt{3}y - a\sqrt{3} = 0$; **5)** а) $(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x - \sin x tgx)$;

б) $\dfrac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$; в) $x^{x^x}\cdot x^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right)$;

г) $x^5(\lg x)\sqrt[3]{x+1}\left(\dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x\ln 10\lg x} + \dfrac{1}{3x+3}\right)$; **6)** а) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; б) $\dfrac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}$;

в) 0; **7)** а) $\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}$; б) $\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{t\sqrt{1-(t-1)^2}}$; в) $-2\sin\left(2e^t\right)$;

г) $\dfrac{\left(t^2+2\right)\left(2t^2+1\right)^2\cos\left(\dfrac{t^3}{3}+2t\right)}{6t^4+7t^2+1}$; **8)** $14x-13y+12=0$, $13x+14y-41=0$;

9) а) $(tgx)^{e^x}\cdot\left(e^x\ln tgx+\dfrac{e^x}{tgx\cdot\cos^2 x}\right)$; б) $((2^x)^{\ln x}+3^{\ln 2})\times\ln 2\left(\ln x+1\right)$;

в) $\sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx\right)$;

г) $\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left(\dfrac{6}{2x-1}+\dfrac{3}{2(3x+2)}-\dfrac{10}{5x+4}+\dfrac{1}{3(1-x)}\right)$;

10) а) $x^{\ln(x^2+1)}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2+1}+\ln\left(x^2+1\right)\right)$;

б) $(\arccos 3x)^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-9x^2}\cdot\arccos 3x}-\ln\arccos 3x\cdot\cos x\right)$;

в) $(\mathrm{tg}2x)^{ctg(x/2)}\left(\dfrac{2ctg\dfrac{x}{2}}{\sin 4x}-\dfrac{\ln tg2x}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)$; г) $(2e^x+1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln\left(2e^x+1\right)}{x}+\dfrac{2e^x\ln x}{2e^x+1}\right)$.