

**Задачи для самостоятельного решения по теме
практического занятия 15**

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава V, § 25 и [2]: глава 7, § 3-4 (см. прилагаемый список литературы)

1. Найти пределы следующих функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln \sin x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^3 + 2x^2 - 3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$;

2. Определить промежутки возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$; б) $y = x + \sin x$;

в) $y = 2e^{x^2 - 4x}$; г) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

3. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$; б) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$;

в) $y = x \cdot \ln^2 x$; г) $y = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3}$.

4. Определить наименьшие и наибольшие значения функций на указанных отрезках (если отрезок не указан, то следует определить наименьшее и наибольшее значения функции во всей области существования):

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1; 5]$;

б) $y = \sqrt{x(10-x)}$;

в) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

5. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

6. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна l .

Ответы:

1) а) $-\frac{1}{3}$; б) 1; в) $\frac{2}{\pi}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) ∞ ; е) e^3 ; **2)** а) $(-\infty, -2), (-2, 8)$ и $(8, \infty)$ – убывает; б) $(-\infty, \infty)$ – возрастает; в) $(-\infty, 2)$ – убывает; $(2, +\infty)$ – возрастает; г) $(-\infty, 1)$ – возрастает; $(1, \infty)$ – убывает; **3)** а) Экстремума нет; б) $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = 0$; в) $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ при $x = \frac{1}{e^2}$; $y_{\min} = 0$ при $x = 1$; г) $y_{\max} = 5$ при $x = 12k\pi$; $y_{\max} = 5\cos\frac{2\pi}{5}$ при $x = 12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = -5\cos\frac{\pi}{5}$ при $x = 12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = 1$ при $x = 6(2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); **4)** а) $m = -6$ при $x = 1$; $M = 266$ при $x = 5$; б) $m = 0$ при $x = 0$ и $x = 10$; $M = 5$ при $x = 5$; в) $m = \frac{1}{2}$ при $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$; $M = 1$ при $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); **5)** $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$.
6) $V = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi l^3$.