Лекция 25. Интегрирование иррациональных функций

Интегрирование иррациональных функций

Интегралы типа $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx$, где a, b, c, d – действительные числа, α, $\beta,\ldots$, δ, γ – натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем *дробно-линейной подстановки* $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ следует, что $x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx=\frac{-dkt^{k-1}\left(ct^k-a\right)-\left(b-dt^k\right)ckt^{k-1}}{\left(ct^k-a\right)^2}dt$, т.е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{x-1}}$.

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x-1=t^6$, $x=t^6+1$, $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x-1}$. Следовательно,

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^4+t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t+1}=6\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=$$

$$=6\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=3t^2-6t+6\ln|t+1|+C=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{x-1}-6\cdot\sqrt[6]{x-1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C.$$

1. Интегралы, содержащие квадратичные иррациональности

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ называют неопределенными интегралами от *квадратичных иррациональностей*. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ – также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

Преобразуем квадратный трехчлен:

$$-x^2+2x+3=-(x^2-2x+1)+4=4-(x-1)^2$$

и сделаем подстановку: $x-1=t$, $x=t+1$, $dx=dt$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{2}+C=\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

2. Найти интеграл $I=\int\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$.

По формуле (8.11) имеем

$$I=\int\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=\left(Ax+B\right)\sqrt{x^2+2x+5}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}}=A\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+\left(Ax+B\right)\cdot\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$

т.е.

$$2x^2=A\left(x^2+2x+5\right)+\left(Ax+B\right)\left(x+1\right)+\lambda,$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему

$$\begin{aligned}
&\text{при } x^2: && 2=A+A,\\
&\text{при } x^1: && 0=2A+A+B,\\
&\text{при } x^0: && 0=5A+B+\lambda.
\end{aligned}$$

Решая ее, находим $A=1$, $B=-3$, $\lambda=-2$. Следовательно,

$$I=(x-3)\sqrt{x^2+2x+5}-2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=$$

$$=(x-3)\sqrt{x^2+2x+5}-2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C\,.$$

2. Тригонометрические и гиперболические подстановки

Интегралы типа $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических или гиперболических функций, с помощью следующих *тригонометрических и гиперболических подстановок*:

1) $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, используем подстановки

$$x=a\sin t\,,\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\,,\ dx=a\cos t\,dt$$

или

$$x=a\,\mathrm{th}t\,,\ \sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{\mathrm{ch}t}\,,\ dx=\frac{a}{\mathrm{ch}^2t}dt\,;$$

2) $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, используем подстановки

$$x=a\,\mathrm{tg}\,t\,,\ \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}\,,\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$$

или

$$x=a\,\mathrm{sh}t\,,\ \sqrt{a^2+x^2}=a\,\mathrm{ch}t\,,\ dx=a\,\mathrm{ch}t\,dt\,;$$

3) $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, используем подстановки

$$x=\frac{a}{\cos t}\,,\ \sqrt{x^2-a^2}=a\mathrm{tg}t\,,\ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$$

или

$$x=a\mathrm{ch}t\,,\ \ \sqrt{x^2-a^2}=a\mathrm{sh}t\,,\ \ dx=a\mathrm{sh}tdt\,.$$

Пример. Найти интеграл $\quad I=\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx\,.$

Положим $x=3\sin t$, $dx=3\cos tdt$, $t=\arcsin\frac{x}{3}$. Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{3\sin t}\cdot 3\cos tdt=\int\frac{9\cos^2 t}{3\sin t}dt=$$

$$=3\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=3\int\frac{dt}{\sin t}-3\int\sin tdt=3\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|+3\cos t+C=$$

$$=3\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3}\right)\right|+3\cos(\arcsin\frac{x}{3})+C=3\ln\left|\frac{x}{3+\sqrt{9-x^2}}\right|+\sqrt{9-x^2}+C.$$

В конце были произведены следующие преобразования:

$$\mathrm{tg}\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{\sin t}{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{\frac{x}{3}}{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{3+\sqrt{9-x^2}}\,,$$

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

3. Интегралы типа $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа $\int R\left(t;\sqrt{a^2-t^2}\right)dt$, $\int R\left(t;\sqrt{a^2+t^2}\right)dt$, $\int R\left(t;\sqrt{t^2-a^2}\right)dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических или гиперболических подстановок.

Отдельно рассмотрим интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Этот интеграл целесообразно находить с помощью подстановки $x=\frac{1}{t}$. После такой подстановки получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a}{t^2}+\frac{b}{t}+c}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{a+bt+ct^2}}.$$

Далее интеграл сводится к табличному с помощью выделения полного квадрата под радикалом.

Аналогичная подстановка делается и в интеграле $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$. В этом случае полагают $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

Пример. Найти интеграл $I=\int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}dx$.

Так как $x^2+2x-4=(x+1)^2-5$, то сделаем подстановку $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда $I=\int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}dt$. Сделаем еще одну замену $t=\frac{\sqrt{5}}{\sin z}$, $dt=\frac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}dz$, $z=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}$. Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z}-5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}}\cdot\frac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}dz=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\cos^2 zdz=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\int\left(1+\cos 2z\right)dz=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{10}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C=-\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}+\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{\left(x+1\right)^2}\right)+C.$$

В конце были произведены следующие тригонометрические преобразования:

$$\sin 2z=2\sin z\cos z=2\sin z\sqrt{1-\sin^2 z}=$$

$$=2\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)}=$$

$$=2\frac{\sqrt{5}}{x+1}\sqrt{1-\frac{5}{(x+1)^2}}=2\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{\left(x+1\right)^2}.$$

4. Подстановки Эйлера

Подстановки Эйлера применяются в интегралах типа $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Рассмотрим три случая.

1) $a>0$. В этом случае делаем замену: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t$. Тогда $ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2$. Отсюда получаем $x=\dfrac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\ t}$, $dx=\left(\dfrac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\ t}\right)'_t dt$.

После проделанной подстановки под знаком интеграла получится рациональная функция.

2) $c>0$. В этом случае делаем замену: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$. Тогда $ax^2+bx+c=x^2t^2\pm 2\sqrt{c}xt+c$. Отсюда получаем $x=\dfrac{\pm 2\sqrt{c}\ t-b}{a-t^2}$, $dx=\left(\dfrac{\pm 2\sqrt{c}\ t-b}{a-t^2}\right)'_t dt$.

После проделанной подстановки под знаком интеграла получится рациональная функция.

3) Трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни α и β, $\alpha\neq\beta$. Тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=|x-\alpha|\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$. Сделаем замену $\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}=t^2$, отсюда получаем $x=\dfrac{a\beta-t^2\alpha}{a-t^2}$, $dx=\left(\dfrac{a\beta-t^2\alpha}{a-t^2}\right)'_t dt$.

Отметим, что вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера зачастую приводит к громоздким выражениям. Поэтому применять их надо в крайнем случае, когда интеграл не удается вычислить другим способом.

Пример. Вычислить интеграл $I=\int\dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$. Тогда $x=\dfrac{t^2-1}{1+2t}$, $dx=\left(\dfrac{t^2-1}{1+2t}\right)' dt=\dfrac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt$. При этом $x+\sqrt{x^2+x+1}=t$. Подставим все в интеграл, получим

$$I=\int\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2\,t}dt.$$

Под знаком интеграла получилась правильная рациональная дробь. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, что бы разложить ее на простейшие дроби. Имеем

$$\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2 t}=\frac{A}{1+2t}+\frac{B}{(1+2t)^2}+\frac{C}{t},$$

$$At(1+2t)+Bt+C(1+2t)^2=2t^2+2t+2.$$

Из полученного равенства находим коэффициенты: $A=1,\ B=-3,\ C=2$. Таким образом

$$I=\int\left(\frac{1}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}+\frac{2}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}+2\ln|t|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right|+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

Интегрирование дифференциального бинома

Интеграл типа $\int x^m\cdot\left(a+bx^n\right)^p dx$ (называемый интегралом от *дифференциального бинома* или *биномиальным интегралом*), где a, b – действительные числа; m, n, p – рациональные числа, берется в элементарных функциях, как показал Чебышев П.А., лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если p – целое число, то производится подстановка $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то производится подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то производится подстановка $a+bx^n=x^n\cdot t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m\cdot\left(a+bx^n\right)^p dx$ не выражаются через известные элементарные функции, т.е. «не берутся».

Пример. Найти интеграл $I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx.$

Так как

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

то $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=3$ (целое число). Следовательно, имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Полагаем $\sqrt{x}+1=t^2$, $x=\left(t^2-1\right)^2$, $dx=2\left(t^2-1\right)\cdot 2tdt$, $t=\sqrt{\sqrt{x}+1}$. Таким образом,

$$I=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot 4t\left(t^2-1\right)dt=4\int\left(t^2-1\right)^2dt=4\int(t^4-2t^2+1)dt=$$

$$=4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=4\left(\frac{\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)^5}{5}-\frac{2\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)^3}{3}+\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)+C=$$

$$=4\sqrt{\sqrt{x}+1}\left(\frac{1}{5}(\sqrt{x}+1)^2-\frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)+1\right)+C.$$

Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях

Существуют интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях. Доказано, например, что неопределенный интеграл от функции e^{-x^2}, играющий большую роль в теории вероятностей, не выражается в элементарных функциях. То же самое можно сказать про интегралы

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx. \tag{2}$$

Интеграл $\int \frac{dx}{\ln x}$ подстановкой $\ln x = t$ сводится к интегралу $\int \frac{e^t}{t} dt$ и, следовательно, тоже не берется в элементарных функциях.

Используя формулу интегрирования по частям, можно показать, что интегралы

$$\int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \quad \int \frac{e^x}{x^n} dx$$

сводятся к интегралам (2). Например,

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx = -\int \sin x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\sin x + \int \frac{1}{x} d\sin x = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x} dx.$$