Лекция 19. Комплексные числа.

Система комплексных чисел

Комплексные числа были введены в связи с тем, чтобы расширить имеющуюся систему действительных чисел. Известно, что действительных чисел не достаточно, чтобы решить любое, например, квадратное уравнение. Так уравнение $x^2+1=0$ не имеет решений среди вещественных чисел. Комплексных чисел окажется достаточно для того, чтобы любой многочлен с вещественными коэффициентами имел хотя бы один корень.

Комплексным числом z назовем упорядоченную пару вещественных чисел (a, b) и будем записывать это $z = (a, b)$.

Определим в системе комплексных чисел операции, действующие в системе вещественных чисел, т.е. сложение и умножение.

Суммой комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется число $z_1+z_2=(a+c,b+d)$.

Произведением комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется число $z_1\cdot z_2=(ac-bd,ad+bc)$.

Нулем в системе комплексных чисел будет число $0 = (0, 0)$.

Заметим, что комплексное число $z = (a, b)$ не равно нулю, если оба числа a и b одновременно не будут равны нулю. Этот факт можно записать еще следующим образом: $a^2+b^2\neq 0$.

Нетрудно проверить, что введенные операции сложения и умножения удовлетворяют всем свойствам аналогичных операций в системе действительных чисел. А именно, выполняются аксиомы коммутативности, ассоциативности для обеих операций, а так же закон дистрибутивности.

Пусть опять даны два комплексных числа $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$, и пусть $z_2\neq 0$, т.е. $c^2+d^2\neq 0$. *Частным* от деления z_1 на z_2 будет комплексное число (x,y), такое, что $z_1=z_2\cdot(x,y)$, или $(a,b)=(cx-dy,cy+dx)$, т.е.

$$\begin{cases} a=cx-dy, \\ b=cy+dx. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Если $z_1=z_2$, т.е. $a = c$, $b = d$, то можно определить *единицу* в системе комплексных чисел. Это будет число $1=\dfrac{z_1}{z_1}=(1,0)$.

Построенная система комплексных чисел является расширением системы вещественных чисел. Рассмотрим числа вида $(a, 0)$. Заметим, что они складываются и перемножаются, как вещественные числа:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0)\cdot(b, 0) = (ab, 0).$$

Мы можем отождествить каждое комплексное число $(a, 0)$ с вещественным числом a, т.е. будем полагать $(a, 0) = a$.

Число $(0, 1)$ назовем *мнимой единицей* и обозначим ее буквой i. Заметим, что $(0,1)\cdot(0,1) = (-1, 0) = -1$. так что $i^2=-1$. Теперь ясно, что число i является корнем уравнения $x^2+1=0$.

Числа вида $(0, a)$ называются *чисто мнимыми* числами. В соответствии с этим в комплексном числе (a, b) число a называется его *действительной* частью, а b – *мнимой* частью.

Различные формы комплексных чисел

Существует три формы комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая и показательная.

Алгебраическая форма получается следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b\cdot(0, 1) = a + bi.$$

Комплексное число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $a + bi$. Комплексно сопряженное число к числу z обозначается $\overline{z}$.

Комплексные числа в алгебраической форме складываются и перемножаются обычным образом с учетом того, что $i^2 = -1$:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\ ,$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i\ .$$

При делении необходимо умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i\ .$$

Пример.

$$\frac{2+i}{1-2i}=\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5i}{1+4}=i\ .$$

Прежде чем ввести две другие формы комплексных чисел, построим их геометрическую интерпретацию.

Будем изображать комплексные числа точками на плоскости, причем по оси абсцисс будем откладывать действительную часть числа, а по оси ординат – мнимую часть числа. Плоскость при этом будем называть *комплексной плоскостью*, ось Ox – *действительной осью*, ось Oy – *мнимой осью.*

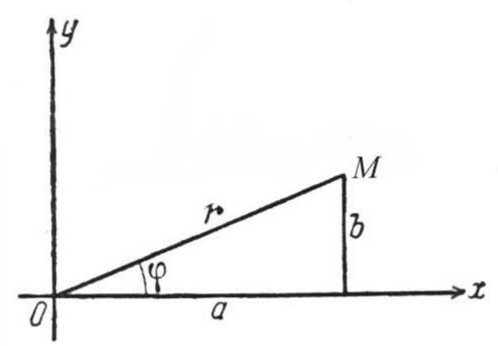

Рис. 1.

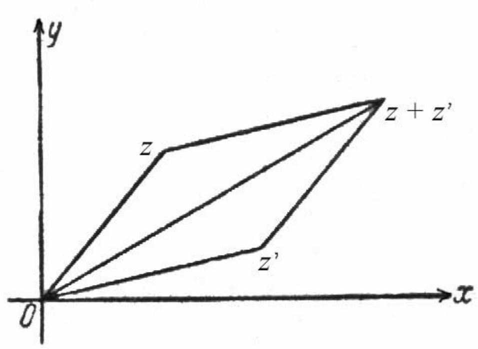

Рис. 2.

Если $z = a + bi$ – комплексное число, соответствующее точке M на комплексной плоскости, то a и b – ее декартовы координаты (рис. 1).

Сложение комплексных чисел геометрически выполняется по правилу параллелограмма, т.е. по правилу сложения соответствующих точкам радиус-векторов (рис. 2).

Точка на плоскости может определяться заданием ее полярных координат: расстоянием r от начала координат до точки и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением ее радиус-вектора (рис. 1).

Число r является неотрицательным вещественным числом и называется *модулем* комплексного числа z. Угол φ может принимать любые вещественные значения и называется *аргументом* числа z. Модуль и аргумент комплексного числа z обозначаются $|z|$ и $\arg z$.

Любое комплексное число однозначным образом задается модулем и аргументом. Только для числа 0 аргумент не определен, это число определяется равенством $r = 0$. Из равенства двух комплексных чисел можно заключить, что их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π.

Между декартовыми и полярными координатами существует следующая связь:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad r^2 = a^2 + b^2, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Из этих формул получается *тригонометрическая форма* числа:

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Для нахождения тригонометрической формы комплексного числа по заданной его алгебраической форме удобно пользоваться следующими формулами:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a}, & a > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 0,\ \ b > 0, \\ \pi + \arctan\dfrac{b}{a}, & a < 0,\ \ b \ge 0, \\ -\pi + \arctan\dfrac{b}{a}, & a < 0,\ \ b < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & a = 0,\ \ b < 0. \end{cases}$$

Пример. Записать число $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$ в тригонометрической форме.

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3, \qquad \arg z = \pi + \arctan\frac{\left(-3\sqrt{3}/2\right)}{\left(-3/2\right)} = \frac{4\pi}{3}.$$

Таким образом, $z = 3 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Тригонометрическая форма записи оказывается удобной при перемножении комплексных чисел. Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad (1)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Аналогичные правила имеют место и для частного комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Правила перемножения (1) легко распространяются на случай произведения любого числа комплексных сомножителей и, в частности, если все сомножители равны между собой, то получаем *формулу Муавра:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (2)$$

Еще одна форма комплексного числа носит название *показательной формы* и имеет вид:

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

где r и φ – это все те же модуль и аргумент числа z. Мы будем пока рассматривать эту форму, как сокращенную форму записи числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

С использованием показательной формы правило перемножения (1) становится вполне естественным:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Пусть имеется комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Запишем сопряженное к этому числу $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$. Получим равенства:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}.$$

Складывая эти два равенства, а затем вычитая из первого второе, получим выражения для $\cos\phi$ и $\sin\phi$, которые называются *формулами Эйлера:*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Извлечение корня из комплексного числа

Пусть необходимо извлечь корень n-й степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Предположим, что в результате мы получим число $w = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Тогда можно записать:

$$\left(r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\right)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя формулу Муавра (2), получим

$$(r')^n(\cos n\varphi' + i\sin n\varphi') = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Мы знаем, что два комплексных числа равны, если равны их модули, а аргументы отличаются на величину $2\pi k$, где k – целое число. Тогда

$$(r')^n = r, \quad n\varphi' = \varphi + 2\pi k, \qquad \text{или} \qquad r' = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi' = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

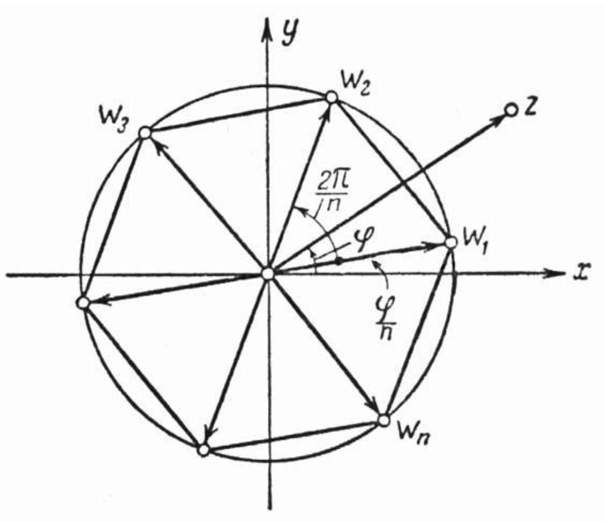

Рис. 3

Значения φ' будут различны при k = 0, 1, 2, …, n-1, и, начиная с $k = n$, будут отличаться от первоначальных на величину, кратную 2π. Таким образом, вычисление корня дает n различных значений, и если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \tag{3}$$

где k = 0, 1, 2, …, n-1.

На комплексной плоскости все значения $w_1, w_2, \ldots, w_n$ корня n-й степени числа z расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных частей (см. рис. 3).

Примеры.

1. Вычислить $\sqrt{i}$.

Представим число i в тригонометрической форме:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} .$$

Воспользуемся формулой (3):

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}, \ \ k = 0,\ 1.$$

При $k = 0$ имеем $w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

при $k = 1$ имеем $w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{-8}$.

Имеем $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Тогда

$$\sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \ \ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Таким образом, получаем три значения корня:

при $k = 0$ $w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$,

при $k = 1$ $w_2 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$,

при $k = 2$ $w_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.