

Лекция 20. Элементы теории многочленов.

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

где n – натуральное число, a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) – постоянные коэффициенты, называется *многочленом* (или *целой рациональной функцией*). Число n называется степенью многочлена.

Корнем многочлена (1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x , при котором многочлен обращается в нуль, т.е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т.е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n - 1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2 (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен n -й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Следствие. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (2)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – корни многочлена, a_0 – коэффициент многочлена при x^n .

Например, легко проверить, что выражение $x^3 - x^2 + 9x - 9$ представляется в виде произведения линейных множителей следующим образом:

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x - 3i)(x + 3i).$$

Если в разложении многочлена (2) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности k* . В случае $k = 1$ (т.е. корень встретился один раз) корень называется *простым*.

С учетом повторяющихся корней разложение многочлена (2) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r},$$

если корень x_1 имеет кратность k_1 , корень x_2 – кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, а r – число различных корней.

Для многочленов с действительными коэффициентами справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

В разложении многочлена (2) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители $(x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib))$, получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами $x^2 + px + q$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib)) &= ((x - a) - ib)((x - a) + ib) = (x - a)^2 + b^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих комплексно-сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Теорема 4. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

при этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$ и все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений:

$$1) x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2 + 4);$$

$$2) x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3);$$

$$3) x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = x^3(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = \\ = (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 1) = (x-3)^2(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или *рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m , а $Q_n(x)$ – многочлен степени n .

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую *неправильную рациональную дробь* $\frac{R(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и *правильной рациональной дроби* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, т.е. $\frac{R(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Пример. Представить *неправильную рациональную дробь* $\frac{2x^4 - 4x + 7}{x - 3}$ в виде суммы многочлена и *правильной рациональной дроби*.

Разделим числитель на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 6x^3 \\ \underline{-6x^3 + 0x^2 - 4x + 7} \\ 6x^3 - 18x^2 \\ \underline{-18x^2 - 4x + 7} \\ 18x^2 - 54x \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x-3 \\ \hline 2x^3 + 6x^2 + 18x + 50 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 4x + 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -50x+7 \\ 50x-150 \\ \hline 157 \end{array}$$

Получим частное $L(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 50$ и остаток $R(x) = 157$. Следовательно,

$$\frac{2x^4 - 4x + 7}{x - 3} = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 50 + \frac{157}{x - 3}.$$

Правильные рациональные дроби вида

$$(I). \frac{A}{x - a},$$

$$(II). \frac{A}{(x - a)^k} (k \geq 2, k \in \mathbb{N}),$$

$$(III). \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \text{ (корни знаменателя комплексные, т.е. } p^2 - 4q < 0),$$

$$(IV). \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} (k \geq 2, \text{ корни знаменателя комплексные}),$$

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются *простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов*.

Теорема 1. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой

разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots \end{aligned}$$

$$\dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{M_{1x} + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_{2x} + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_mx} + N_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}, \quad (3)$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ – некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$1) \frac{x^2 + 3}{(x-3)(x-5)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{D}{(x-5)^3};$$

$$2) \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1} + \frac{Fx + P}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ в равенстве (3) можно применить *метод неопределенных коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (1) приведем простейшие дроби к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е.

$$P(x) = S(x). \quad (4)$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (4) получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$