Лекция 21. Неопределённый интеграл.

Первообразная и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции* $f(x)$ *найти ее производную (или дифференциал)*. Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию* $F(x)$, *зная ее производную* $F'(x) = f(x)$ *(или дифференциал)*. Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x)=f(x)\,dx).$$

Пример. Первообразной функции $y = x^3$, $x \in R$, является функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$. Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, где C – постоянная, поскольку $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 + 0 = f(x)$.

Теорема 1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Доказательство. Функция $F(x)+C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ – некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a;b)$ имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А это означает, что

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

где C – постоянное число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$.

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, $\int$ – *знаком неопределенного интеграла.*

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства) (см. рис. 1). График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой*.

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. Всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную, а, следовательно, и неопределенный интеграл.

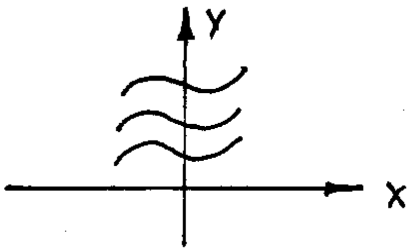

Рис. 1

Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Действительно,

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=dF(x)+dC=F'(x)dx=f(x)dx\,,$$

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x).$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Например, равенство $\int(3x^2+5)dx=x^3+5x+C$ верно, так как $\left(x^3+5x+C\right)'=3x^2+5$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)=F(x)+C$$

Действительно,

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$$

($a\neq 0$ – постоянная).

Действительно,

$$\int af(x)dx=\int aF'(x)dx=\int (aF(x))'dx=\int d(aF(x))=aF(x)+C_1=$$

$$=a\left(F(x)+\frac{C_1}{a}\right)=a(F(x)+C)=a\int f(x)dx,$$

(положили $\frac{C_1}{a} = C$).

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Для доказательства положим $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int (F'(x) \pm G'(x))dx = \int (F(x) \pm G(x))'dx = \int d(F(x) \pm G(x)) =$$

$$= F(x) \pm G(x) + C = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C.$

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x) -$ произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Докажем это свойство. Пусть x – независимая переменная, $f(x)$ – непрерывная функция и $F(x)$ – ее первообразная. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + C.$ Положим теперь $u = \varphi(x),$ где $\varphi(x) -$ непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции имеем

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Отсюда $\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$

Из последнего свойства следует, что формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как $d(\sin u) = \cos u \cdot du,$ то

$$\int \cos u \cdot du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются табличными. Методы нахождения первообразных (т.е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования *u* может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Приведем таблицу основных интегралов.

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right);$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$
4. $\int e^u du = e^u + C;$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C; \qquad (\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C);$
6. $\int \cos u du = \sin u + C; \qquad (\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C);$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C$;

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C$;

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$; $\quad\left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right)$;

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$; $\quad\left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right)$;

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$;

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C$;

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$;

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$;

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Докажем, например, справедливость формулы 2. Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u, отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln|u| = \ln u$, тогда $d\ln|u| = d\ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому $\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln|u| + C$ при $u > 0$.

Если $u < 0$, то $\ln|u| = \ln(-u)$. Но $d\ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит, $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln|u| + C$ при $u < 0$.

Итак, справедливость формулы 2 доказана.

Примеры.

1. Вычислить интеграл $\int (3-5^x-2x^4+\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\sin x)dx$**.**

Используем третье и четвертое свойства, а так же формулы 1, 3, 5 и 9 из таблицы интегралов:

$$\int (3-5^x-2x^4+\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\sin x)dx = 3\int dx-\int 5^x dx-2\int x^4 dx+\sqrt{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x}-$$

$$-\int \sin x dx = 3x-\frac{5^x}{\ln 5}-2\frac{x^5}{5}+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x+\cos x+C.$$

2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}-xe^x+2}{x}dx$.

Имеем

$$\int \frac{\sqrt{x}-xe^x+2}{x}dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{xe^x}{x}+\frac{2}{x}\right)dx = \int x^{-1/2}dx-\int e^x dx+2\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{1/2}}{1/2}-e^x+2\ln|x|+C.$$