Лекция 22. Методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u+a), \quad a - \text{число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 - \text{число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au+b), \quad a \neq 0,\ b - \text{числа},$$

$$udu = \frac{1}{2}d(u^2), \quad u^n du = \frac{1}{n+1}d(u^{n+1}),$$

$$\cos u du = d(\sin u), \quad \sin u du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}du = \frac{du}{u} = d(\ln u),$$

$$e^u du = de^u, \quad a^u du = \frac{1}{\ln a}d(a^u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u}du = \frac{du}{\cos^2 u} = d(\mathrm{tg}\, u),$$

$$\frac{1}{1+u^2}du = \frac{du}{1+u^2} = d(\mathrm{arctg} u).$$

Вообще, формула

$$f'(u)du = d(f(u))$$

очень часто используется при подведении под знак дифференциала.

Примеры:

1) $\int (3x+2)^{26}dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^{26}d(3x+2) = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{27}}{27} + C,$

(использовалась формула 1 таблицы интегралов).

$$2)\ \int\left(3^{1-x}+\frac{1}{x+2}-\frac{4}{\cos^2(3x)}\right)dx=\int 3^{1-x}dx+\int\frac{dx}{x+2}-4\int\frac{dx}{\cos^2(3x)}=$$

$$=-\int 3^{1-x}d(1-x)+\int\frac{d(x+2)}{x+2}-\frac{4}{3}\int\frac{d(3x)}{\cos^2(3x)}=-\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+\ln|x+2|-\frac{4}{3}\operatorname{tg}(3x)+C,$$

(использовались формулы 2, 3, 9).

$$3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\cdot x)}{\sqrt{(3)^2-(\sqrt{2}\cdot x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot x}{3}+C,$$

(использовалась формула 13).

$$4)\ \int\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4+(x-1)^2}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{2^2+(x-1)^2}}=\ln\left|x-1+\sqrt{5-2x+x^2}\right|+C,$$

(использовалась формула 14).

$$5)\ \int\operatorname{tg}u\ du=\int\frac{\sin u\ du}{\cos u}=-\int\frac{d(\cos u)}{\cos u}=-\ln|\cos u|+C,$$

(вывод формулы 7).

$$6)\ \int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{\cos^2\frac{u}{2}+\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du=\int\frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du+\int\frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du=$$

$$=\int\operatorname{ctg}\frac{u}{2}d\left(\frac{u}{2}\right)+\int\operatorname{tg}\frac{u}{2}d\left(\frac{u}{2}\right)=\ln\left|\sin\frac{u}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{u}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|+C,$$

(вывод формулы 11).

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл должен приводиться к новому интегралу, который будет табличным или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t) -$ функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{1}$$

Формула (1) также называется *формулой замены переменных* в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда, когда функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int g(t)dt$$

Другими словами, формулу (8.4) можно применять справа налево.

Примеры.

1) Найти $\int x \cdot (x+3)^{50} dx.$

Пусть $x + 3 = t$, тогда $x = t - 3,$ $dx = dt.$ Имеем

$$\int x\cdot(x+3)^{50}dx=\int(t-3)\cdot t^{50}dt=\int t^{51}dt-3\int t^{50}dt=\frac{t^{52}}{52}-3\frac{t^{51}}{51}+C=$$

$$=\frac{(x+3)^{52}}{52}-\frac{(x+3)^{51}}{17}+C.$$

2) Найти $\int x\cdot\sqrt[3]{x-5}dx.$

Пусть $\sqrt[3]{x-5}=t,$ тогда $x=t^3+5,\quad dx=3t^2dt.$ Имеем

$$\int x\cdot\sqrt[3]{x-5}dx=\int(t^3+5)\cdot t\cdot 3t^2dt=3\int t^6dt+15\int t^3dt=3\frac{t^7}{7}+15\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=\frac{3}{7}(x-5)^{7/3}+\frac{15}{4}(x-5)^{4/3}+C.$$

3) Получить формулу $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C.$

Обозначим $t=\sqrt{u^2+a^2}+u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}du+du=\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{\sqrt{u^2+a^2}}du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u}=\frac{dt}{t}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = udv + vdu$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{2}$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям.* Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)a^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен, k – число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. Формула (8.5) применяется один раз, если многочлен $P(x)$ первой степени, в противном случае каждое применение формулы (8.5) понижает степень многочлена $P(x)$ на единицу.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin kxdx,$ $\int P(x)\arccos kxdx,$ $\int P(x)\operatorname{arctg} kxdx,$ $\int P(x)\operatorname{arcctg} kxdx,$ $\int P(x)\ln xdx.$ Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx,$ $\int e^{ax}\cos bxdx,$ где a и b – числа. За u можно принять любую из функций $u = e^{ax}$, $u = \sin bx$ или $u = \cos bx$. Данные интегралы относятся к тому типу интегралов, вычисление которых приводит к исходному интегралу, после чего исходный интеграл может быть выражен из полученного уравнения (см. пример 4).

Примеры.

1) Найти $\int (3x+1)e^{2x}dx$.

Пусть $\begin{bmatrix} u = 3x+1 \Rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix}$ (можно положить C=0). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (3x+1)e^{2x}dx = (3x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}3dx = \frac{1}{2}(3x+1)e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

2) Найти $\int x^2\cos(x-1)dx$.

Пусть $\begin{bmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos(x-1)dx \Rightarrow v = \int \cos(x-1)dx = \sin(x-1) \end{bmatrix}$. Поэтому

$$\int x^2\cos(x-1)dx = x^2\sin(x-1) - 2\int x\sin(x-1)dx.$$

Для вычисления интеграла $\int x\sin(x-1)dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $\begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x-1)dx \Rightarrow v = -\cos(x-1) \end{bmatrix}$. Тогда

$$\int x^2\cos(x-1)dx = x^2\sin(x-1) + 2x\cos(x-1) - 2\int \cos(x-1)dx =$$

$$= x^2\sin(x-1) + 2x\cos(x-1) - 2\sin(x-1) + C.$$

3) Найти $\int x\operatorname{arctg} x dx.$

Пусть $\begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$. Поэтому,

$$\int x\operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

4) Найти $I = \int e^{2x}\cos x dx$.

Будем применять формулу (2) непосредственно, подводя под дифференциал экспоненту. Имеем

$$I = \int e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{2}\int \cos x de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x - \frac{1}{2}\int e^{2x} d\cos x =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x dx.$$

Применим формулу (2) еще раз, подводя под дифференциал снова экспоненту. Получим

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}\int \sin x de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}\int e^{2x} d\sin x =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}\cdot I.$$

Итак, мы получили уравнение относительно неизвестного интеграла I:

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}\cdot I .$$

Выражая из этого уравнения I, получим

$$I = \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\sin x .$$