Лекция 23. Интегрирование дробно-рациональных функций.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$ (формула (1));

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx,$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$.

Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем:

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + (N - \frac{Mp}{2}) \cdot \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a} + C,$$

т.е. возвращаясь к переменной x,

$$J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

Пример. Найти $\int\frac{2x+1}{x^2+4x+13}dx$.

Выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2+4x+13=(x+2)^2+9$. Сделаем подстановку $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$ и

$$\int\frac{2x+1}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{2(t-2)+1}{t^2+9}dx=\int\frac{2tdt}{t^2+9}-3\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\ln(t^2+9)-\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\ln(x^2+4x+13)-\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$$

4. Рассмотрим интеграл вида $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$, $k\geq 2$, $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},\quad a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k} \right) = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k} \right). \qquad (3)$$

К последнему интегралу из (3) применим формулу интегрирования по частям. Положим

$$u = t\,, \quad dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}\,, \quad du = dt\,,$$

$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\,,$$

Тогда

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} \cdot J_{k-1}\,.$$

Подставляя данный интеграл в равенство (3), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)} \cdot J_{k-1} \right),$$

т.е.

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right)$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k>1$.

Пример. Найти интеграл $J_3=\int\frac{dt}{(t^2+4)^3}$.

Здесь *a*=2, $k=3$. Так как $J_1=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C$, то

$$J_2=\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1+\frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+4)}\right)=\frac{1}{16}\operatorname{arctg}t+\frac{t}{8(t^2+4)}+C,$$

$$J_3=\frac{3}{16}J_2+\frac{t}{16(t^2+4)^2}=\frac{t}{16(t^2+4)^2}+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{16}\operatorname{arctg}t+\frac{t}{8(t^2+4)}\right)+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный выше материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей*.

1. Если дробь неправильная, то необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель. Получим

$$\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=x^2-2x+2+\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$-3x^3-2x^2-2\equiv Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2,$$

т.е.

$$-3x^3-2x^2-2\equiv(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases}A+C=-3,\\2A+B+D=-2,\\2A+2B=0,\\2B=-2,\end{cases}$$

из которой находим коэффициенты: $B=-1$, $A=1$, $C=-4$, $D=-3$. Таким образом

$$\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4x+3}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=x^2-2x+2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4x+3}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \int\left(x^2-2x+2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4x+3}{x^2+2x+2}\right)dx =$$

$$=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\ln|x|+\frac{1}{x}-\int\frac{4x+3}{(x+1)^2+1}dx.$$

Обозначим $x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$. Таким образом,

$$\int\frac{4x+3}{(x+1)^2+1}dx=\int\frac{4t-4+3}{t^2+1}dt=4\int\frac{tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{arctg} t+C=2\cdot\ln(x^2+2x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$