

## Лекция 24. Интегрирование тригонометрических функций.

Интегрирование тригонометрических функций.

### 1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными  $\sin x$  и  $\cos x$ , над которыми выполняются рациональные действия (сложение, умножение, возведение в степень и деление) принято обозначать  $R(\sin x; \cos x)$ , где  $R$  – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа  $\int R(\sin x; \cos x) dx$  сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , которая называется *универсальной*.

$$\text{Так как } \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \text{ то}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Поэтому  $\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt$ , где  $R_1(t)$  – рациональная функция от  $t$ .

**Пример.** Найти интеграл  $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ .

Сделаем универсальную подстановку  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ . Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \ln(t+1) + C = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

Универсальная подстановка зачастую приводит к громоздким выражениям, к дробям, в числителе и знаменателе которых стоят многочлены высоких степеней, которые трудно раскладывать на простейшие дроби. Поэтому на практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция  $R(\sin x; \cos x)$  нечетна относительно  $\sin x$ , т.е.  $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ , то подстановка  $\cos x = t$  рационализирует интеграл;

2) если функция  $R(\sin x; \cos x)$  нечетна относительно  $\cos x$ , т.е.  $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ , то делается подстановка  $\sin x = t$ ;

3) если функция  $R(\sin x; \cos x)$  четна относительно  $\sin x$  и  $\cos x$   $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$ , то интеграл рационализуется подстановкой  $\operatorname{tg} x = t$ .

Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$  или  $\int R(\sin^2 x; \cos^2 x) dx$ :

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = t,$$

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

**Пример.** Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{3 + \sin^2 x}$ .

Так как  $R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{3 + (-\sin x)^2} = \frac{1}{3 + \sin^2 x} = R(\sin x; \cos x)$ , то полагаем

$\operatorname{tg} x = t$ . Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{4t^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{(2t)^2+(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

## 2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

- 1) Подстановка  $\sin x = t$ , если  $n$  – целое положительное *нечетное* число.
- 2) Подстановка  $\cos x = t$ , если  $m$  – целое положительное *нечетное* число.

- 3) Формулы понижения порядка:  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ,  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ,

$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ , если  $m$  или  $n$  – целые *неотрицательные четные* числа.

- 4) Подстановка  $\operatorname{tg} x = t$ , если  $m+n$  – есть целое четное отрицательное число. В частности к этому же случаю сводятся и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin^m \frac{x}{2} \cos^m \frac{x}{2}}, \quad \int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

- 1) Иногда, если среди чисел  $m$  и  $n$  есть отрицательные, помогают формулы:

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1, \quad \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + 1.$$

- 6) В общем случае, если  $m$  и  $n$  произвольные рациональные числа, рассматриваемый интеграл может быть сведен к биномиальному интегралу (смотри следующую лекцию):

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d \sin x = \int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt .$$

**Примеры.**

1. Найти интеграл  $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$ .

Здесь  $m = 3$  – нечетное число. Применим подстановку  $\cos x = t$ . Тогда  $x = \arccos t$ ,

$$dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \text{ и}$$

$$I = \int (\sqrt{1-t^2})^3 t^2 \left( -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = -\int (1-t^2)t^2 dt = \int (t^4 - t^2) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

2. Найти интеграл  $I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$ .

Здесь  $m = 2$ ,  $n = 4$  – оба четные. Применим формулы понижения порядка

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

3. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x dx$ .

Здесь  $m+n=-4$ . Обозначим  $\operatorname{tg}x=t$ . Тогда  $x=\operatorname{arctg}t$ ,  $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ ,  $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ и}$$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg}x| + C.$$

4. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$ .

Имеем

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) d(\operatorname{tg}x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}x + C.$$

### 3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа  $\int \sin ax \cdot \cos bx$ ,  $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$ ,  $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$  вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

**Пример.** Найти интеграл  $I = \int \cos 3x \sin 7x dx$ .

Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int \cos 3x \sin 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 10x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{10} \cos 10x \right) + C. \end{aligned}$$

### Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций вполне аналогично интегрированию тригонометрических функций. При этом необходимо помнить основные формулы для гиперболических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1),$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1), \quad \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x.$$

**Пример.** Найти интеграл  $I = \int \operatorname{ch}^3 x dx$ .

$$\text{Имеем } I = \int \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{ch} x dx = \int (1 + \operatorname{sh}^2 x) d\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C.$$