Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причём все первообразные содержатся в выражении $F(x)+C$, где C – постоянная. *Неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех её первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Свойства неопределённого интеграла (правила интегрирования):

1°. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ или $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.

2°. $\int dF(x)=F(x)+C$.

3°. $\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx$, где a – постоянная.

4°. $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.

5°. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du=F(u)+C$ (инвариантность формулы интегрирования).

Таблица основных интегралов:

1. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$ $\qquad \left(\int du=u+C\right)$.

2. $\int\dfrac{du}{u}=\ln|u|+C$.

3. $\int\sin u\,du=-\cos u+C$.

4. $\int\cos u\,du=\sin u+C$.

5. $\int\dfrac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}\,u+C$.

6. $\int\dfrac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}\,u+C$.

7. $\int\mathrm{sh}\,u\,du=\mathrm{ch}\,u+C$.

8. $\int\mathrm{ch}\,u\,du=\mathrm{sh}\,u+C$.

9 . $\int\dfrac{du}{\mathrm{ch}^2 u}=\mathrm{th}\,u+C$.

10. $\int\dfrac{du}{\mathrm{sh}^2 u}=-\mathrm{cth}\,u+C$.

11 $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ $\left(\int e^u du = e^u + C\right)$.

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$.

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$.

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

16. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$.

17. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

Отметим, что в приведённой таблице переменная u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству 5°).

При сведении данного интеграла к табличному часто используется приём *подведения функции под знак дифференциала* по формуле $f'(u)du = d[f(u)]$, например, $du = d(u + a)$ (здесь a – число), $du = \frac{1}{a} d(a u)$ ($a \neq 0$), $u\,du = \frac{1}{2} d(u^2)$, $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$, $\cos u\, du = d(\sin u)$ и т. д. с тем, чтобы далее, в соответствии со свойством 5°, воспользоваться табличными интегралами.

Примеры решения задач

1. Используя таблицу, найти следующие интегралы: а) $\int \frac{dx}{x^3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\int 2^x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение.

а) Воспользуемся табличным интегралом 1 ($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C .$$

б) Аналогично находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C .$$

в) Используя табличный интеграл 11 ($a = 2$), находим:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C .$$

г) Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл 14, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C .$$

2. Используя таблицу и основные свойства неопределённого интеграла, найти интеграл: а) $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{x} + 7\right) dx$; б) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^2+9} dx$; г) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$.

Решение.

а) Воспользуемся свойствами 3° и 4° неопределённого интеграла, а затем табличными интегралами 11, 2, 1:

$$\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{x} + 7\right) dx = 3\int 5^x dx - 2\int \frac{dx}{x} + 7\int dx = 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - 2\ln|x| + 7x + C .$$

б) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\dfrac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\int\frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+10x^{\frac{1}{2}}+C$$

в) Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{x^2}{x^2+9}=\frac{(x^2+9)-9}{x^2+9}=1-\frac{9}{x^2+9}.$$

Тогда с учётом табличных интегралов 1 и 12, имеем

$$\int\frac{x^2}{x^2+9}dx=\int\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=\int dx-9\int\frac{dx}{x^2+9}=x-3\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

г) Используем известные формулы тригонометрии, а также табличные интегралы 6 и 1:

$$\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

3. С помощью приёма подведения функции под знак дифференциала найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{x+3}$; б) $\int (3x-1)^{24}\,dx$; в) $\int \ln^4 x \frac{dx}{x}$; г) $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Решение.

а) Этот интеграл можно привести к табличной формуле 2 ($u = x+3$):

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

б) Здесь относительно переменной $u = 3x-1$ получаем интеграл от степенной функции:

$$\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C.$$

в) Поскольку $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$, то имеем:

$$\int \ln^4 x \frac{dx}{x} = \int \ln^4 x\,d(\ln x) = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$$

г) Так как $\sin x\,dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$