Метод замены переменной и формула интегрирования по частям

Замена переменной в неопределённом интеграле производится с помощью *подстановок* двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$;

2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(u)du$.

Получающиеся после применения подстановки интегралы должны быть более удобны для интегрирования, чем исходные.

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$; её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берётся такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, a – число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv принять все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$. Удобно положить $dv = P(x)\,dx$, а за u принять остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, где a и b – числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Примеры решения задач

1. Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

а) $\int (3x-1)^{24}\,dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$; в) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$; г) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

е) $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$; ж) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5}$; з) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Решение.

а) $$\int (3x-1)^{24}dx = \begin{bmatrix} t = 3x-1 \\ dt = 3dx \end{bmatrix} = \int t^{24}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{24}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{25}}{25} + C =$$

$$= \frac{(3x-1)^{25}}{75} + C.$$

Этот интеграл был вычислен нами ранее (см. занятие 1, 3б). Вообще, все интегралы, вычисляемые с помощью приёма подведения под знак дифференциала, могут быть найдены также и методом замены переменной.

б) $$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

в) $$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \begin{bmatrix} t = x^5 \\ dt = 5x^4dx \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} =$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right|+C.$$

г) $$\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx=\begin{bmatrix} x-3=t\Rightarrow x=t+3\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int(t+3)\cdot\sqrt{t}\,dt=\int(t\sqrt{t}+3\sqrt{t})dt=$$

$$=\int t^{\frac{3}{2}}dt+3\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+3\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

д) $$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\begin{bmatrix} t=1+\sqrt{x}\Rightarrow x=(t-1)^2\\ dx=2(t-1)dt\end{bmatrix}=2\int\frac{t-1}{t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=2t-2\ln|t|+C=2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

е) $$\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx=\begin{bmatrix} t=2\ln x+3\\ dt=\frac{2}{x}dx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

ж) $$\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5}=\begin{bmatrix} t=e^{2x}\\ dt=2e^{2x}dx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+C.$$

з) $$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\begin{bmatrix} x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{bmatrix}=\int\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-\operatorname{ctg} t-t+C=$$

$$=-\operatorname{ctg}(\arcsin x)-\arcsin x+C.$$

2. Найти интегралы, используя интегрирование по частям: а) $\int x\cdot e^x dx$; б) $\int x^2\cdot\ln x\,dx$; в) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\int x^2\cos x\,dx$; д) $\int e^x\cdot\cos x\,dx$.

Решение.

а) $\int x\cdot e^x dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=e^x dx\Rightarrow v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right]=x\cdot e^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

б) $\int x^2\cdot\ln x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^2\,dx\Rightarrow v=\int x^2\,dx=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right]=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2 dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

в) $\int \operatorname{arctg} x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\operatorname{arctg} x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right]=x\cdot\operatorname{arctg} x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=$

$$=x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

г) $\int x^2\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x^2\Rightarrow du=2x\,dx \\ dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=\sin x\end{array}\right]=x^2\sin x-2\int x\cdot\sin x\,dx.$

Для интеграла $\int x\cdot\sin x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям:

$$\int x\cdot\sin x\,dx=\begin{bmatrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin x\,dx\Rightarrow v=-\cos x\end{bmatrix}=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx=$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+C$$

Тогда $\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-2(\sin x-x\cdot\cos x+C)$.

д) $I=\int e^x\cdot\cos x\,dx=\begin{bmatrix} u=e^x\Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=\sin x\end{bmatrix}=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$.

Создаётся впечатление, что интегрирование по частям не привело к цели, так как интеграл не упростился. Попробуем, однако, ещё раз проинтегрировать по частям:

$$I_1=\int e^x\cdot\sin x\,dx=\begin{bmatrix} u=e^x\Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\sin x\,dx\Rightarrow v=-\cos x\end{bmatrix}=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx,$$

т. е. $I_1=-e^x\cos x+I$.

Таким образом, приходим к уравнению относительно неизвестной величины I: $I=e^x\sin x-(-e^x\cos x+I)$, откуда следует, что $I=\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$.