Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, где m – целое число, большее единицы;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $p^2-4q<0$, т. е. квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$, где m – целое число, большее единицы и квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней;

Во всех четырёх случаях предполагается, что A, B, p, q, a – действительные числа.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int(x-a)^{-m}d(x-a) = \frac{A}{1-m}(x-a)^{1-m} + C$;

III. Выделяем полный квадрат в знаменателе и делаем соответствующую подстановку:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \begin{bmatrix} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B - A\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \left(B-A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C$$

(здесь $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$).

IV. Аналогично,

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{Ax+B}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^m}dx = \begin{bmatrix} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{(t^2+a^2)^m}dt = A\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^m} + \left(B-A\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \frac{A}{2(1-m)}(x^2+a^2)^{1-m} + \left(B-A\frac{p}{2}\right)\cdot J_m$$

Здесь $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, а интеграл $J_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ вычисляется с помощью рекуррентной формулы

$$J_m = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2m-3}{2m-2}J_{m-1} + \frac{t}{2(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}}\right),$$

позволяющей после $(m-1)$- кратного применения свести данный интеграл J_m к табличному $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

В общем случае, перед интегрированием рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ надо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из неё целую часть, т. е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, а $P_1(x)/Q(x)$ – правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \ldots (x^2 + px + q)^n \ldots,$$

где $p^2 - 4q < 0$, т. е. квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней;

3) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{x^2 + px + q} + \ldots;$$

4) вычислить неопределённые коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, C_1,$ $B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots,$ для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведётся к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Примеры решения задач

1. Найти интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}dx$.

Решение:

Квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней, поэтому данная дробь – простейшая третьего типа.

$$\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{6x-7}{(x+2)^2+9}dx = \begin{bmatrix} t = x+2 \Rightarrow x = t-2 \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{6t-19}{t^2+9}dt =$$

$$= 6\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 19\int \frac{dt}{t^2+9} = 6 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right| - 19 \cdot \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= 3\ln(x^2+4x+13) - \frac{19}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx$.

Решение.

Квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней, поэтому данная дробь – простейшая четвёртого типа.

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx = \int \frac{8x+5}{((x-1)^2+16)^2}dx = \begin{bmatrix} t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{8t+13}{(t^2+16)^2}dt == 8\int \frac{t\,dt}{(t^2+16)^2} + 13\int \frac{dt}{(t^2+16)^2} =$$

$$= 8\int \frac{\frac{1}{2}d(t^2+16)}{(t^2+16)^2} + 13\cdot J_2 = -\frac{4}{t^2+16} + 13\cdot J_2$$

Интеграл $J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+16)^2}$ вычисляется с помощью рекуррентной формулы при $m=2$, $a=4$:

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+16)^2} = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t^2+16} + \frac{t}{2\cdot 1\cdot (t^2+16)}\right) =$$

$$= \frac{1}{32}\cdot\left(\frac{t}{t^2+16} + \frac{1}{4}arctg\frac{t}{4}\right) + C$$

Возвращаясь к переменной x, находим окончательно:

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx = \frac{13}{32}\cdot\left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4}arctg\frac{x-1}{4}\right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + +C$$

3. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{7x+4}{x^2-x-6}dx$; б) $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx$;

в) $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx$.

Решение.

а) Подынтегральная дробь – правильная. Разложив на множители знаменатель, представим её в виде суммы простейших дробей 1-го типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Приведём дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е.

$$7x+4 = A(x+2)+B(x-3). \tag{1}$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода сравнивания коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод сравнивания коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (1) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x+4 = (A+B)x + (2A-3B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Сравнивая коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 2A-3B=4 \end{cases}.$$

Решая эту систему, найдём: $A=5,\ B=2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (1) частное значение $x=3$. Тогда получим

$$7\cdot 3+4 = A\cdot(3+2),$$

откуда $A=5$. Подставляя теперь в уравнение (1) значение $x=-2$ (удобнее всего подставлять значения, совпадающие с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим: $B=2$.

Таким образом,

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+2}$$

и, значит,

$$\int\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx=5\int\frac{dx}{x-3}+2\int\frac{dx}{x+2}=5\ln|x-3|+2\ln|x+2|+C$$

б) Подынтегральная дробь – правильная, однако, её знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2-1)(x+1)=(x-1)(x+1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2.$$

Разложим теперь дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь затем от знаменателей, приходим к равенству:

$$x^2+5x-2=A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A, B и C воспользуемся методом частных значений. Положим $x=1$, тогда $A=1$. Полагая $x=-1$, находим $B=3$.

Осталось найти коэффициент C. Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким вычислениям. Проще всего положить $x=0$. Тогда $-2=A-B-C$, откуда, с учётом найденных значений A и B, получим: $C=0$.

Итак,

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x+1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\int\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+C.$$

в) Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2-1 & x^3+x^2+x \\
\underline{x^5+\;\;x^4+\;\;x^3\qquad\qquad\quad} & \overline{x^2-x} \\
-\,-\;x^4-\;x^3+0\cdot x^2-1 & \\
\underline{-\;x^4-\;x^3-\;x^2\quad} & \\
x^2\;\;-1 &
\end{array}$$

т. е.

$$\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}=x^2-x+\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}.$$

Отсюда

$$\int\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx=\int(x^2-x)dx+\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим её в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим:

$$x^2-1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)x$$

Воспользуемся методом сравнивания коэффициентов. Для этого раскроем скобки в правой части и приведём подобные:

$$x^2-1=(A+B)x^2+(A+C)x+A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x^2, x^1 и x^0 в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A+C=0, \\ A=-1 \end{cases}$$

из которой находим: $A=-1, B=2, C=1.$

Таким образом,

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

откуда

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)}dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = -\ln|x| + \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} =$$

$$= -\ln|x| + \ln\left|x^2+x+1\right| + C = \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + C$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + C.$$