

## Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удаётся рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим некоторые наиболее типичные случаи.

1. Интегралы вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R$  – рациональная функция (функция с переменными  $\sin x$  и  $\cos x$ , над которыми выполняются рациональные действия – сложение, вычитание, умножение и деление), приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью т. н. *универсальной тригонометрической подстановки*  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . При этом

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\text{т. е. } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Хотя универсальная подстановка позволяет найти любой интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , однако в большинстве случаев она приводит к чересчур громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими, более эффективными подстановками. Тем не менее, некоторые интегралы наиболее быстро считаются именно с помощью этой подстановки. В частности, это относится к интегралам вида  $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$ , где  $a$  или  $b$  не равны нулю.

2. Интегралы вида  $\int R(\operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x) dx$ , где  $R$  – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью подстановки  $t = \operatorname{tg} x$ . При этом

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

т. е.  $\int R(\operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x) dx = \int R\left(t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt.$

3. Интегралы вида  $\int f(\sin x) \cos x dx$  и  $\int f(\cos x) \sin x dx$ , где  $f$  – некоторая (не обязательно рациональная!) функция, вычисляются с помощью подстановок  $t = \sin x$  и  $t = \cos x$  соответственно. При этом

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x) = [t = \sin x] = \int f(t) dt,$$

$$\int f(\cos x) \sin x dx = -\int f(\cos x) d(\cos x) = [t = \cos x] = -\int f(t) dt.$$

4. Интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .

Выделим здесь два важных случая.

а) Если среди  $m$  и  $n$  есть нечётное число, то интеграл приводится к одному из указанных в п. 3, например, если  $m = 2k + 1$ , то

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = \\ &= -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = [t = \cos x] = -\int (1 - t^2)^k t^n dt. \end{aligned}$$

б) Если оба числа  $m$  и  $n$  – чётные, то следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

5. Интегралы типа  $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$ ,  $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$ ,  $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$  вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

### Примеры решения задач

1. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 5}$ .

**Решение.**

Воспользуемся универсальной подстановкой (случай 1):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 5} &= \left[ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} = \\ &= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = - \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = - \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C \end{aligned}$$

2. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

**Решение.**

Это интеграл вида 2. Применим подстановку  $t = \operatorname{tg} x$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\frac{1}{2} + t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C \end{aligned}$$

3. Найти интегралы: а)  $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$ .

**Решение:**

Оба интеграла приводятся к виду 3.

$$\text{а) } \int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx = \int \sin^2 x \sqrt{\cos x} \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \sqrt{\cos x} \sin x dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = \int (1 - t^2) \sqrt{t} (-dt) = \int (t^2 \sqrt{t} - \sqrt{t}) dt = \int (t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} \sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3} \sqrt{\cos^3 x} + C.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)} = \left[ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 (1 - t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{1 - t^2 + t^2}{t^2 (1 - t^2)} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1 - t^2} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) + C = \frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| - \frac{2}{\sin x} \right) + C.$$

4. Найти интегралы: а)  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ ; б)  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ .

**Решение.**

Это интегралы типа 4.

$$\text{а) } \int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \left[ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

$$\text{б) } \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left( \int dx - \int \cos 4x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$$

**5.** Найти интеграл  $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$ .

**Решение.**

Это интеграл типа 5.

$$\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \left( \int \cos 2x dx + \int \cos 8x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$