

Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

1. Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где R – рациональная функция, a, b, c, d – действительные числа, $\alpha, \beta, \dots, \delta, \gamma$ – натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной дроби путём подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \dots, \frac{\delta}{\gamma}$.

2. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью следующих *тригонометрических подстановок*: $x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла, $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ для второго интеграла, $x = \frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

3. Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можно найти, если выделить под корнем полный квадрат:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$. При этом интегралы приводятся к рассмотренным в п. 2.

4. Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, где a, b – действительные, а m, n, p – рациональные числа выражаются через элементарные функции только в трёх случаях:

1) p – целое число; данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n ;

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число; интеграл рационализируется с помощью подстановки $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p ;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число; подстановка $a + bx^n = x^n \cdot t^s$, где s – знаменатель дроби p .

Примеры решения задач

1. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$; в) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Решение.

Это интегралы типа 1.

а) В этом случае $a = d = 1$, $b = c = 0$. Сделаем подстановку $x = t^6$ (6 – наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \left[\int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - \int \frac{dt}{t + 1} \right] = 6 \left[\int \frac{(t + 1)(t^2 - t + 1)}{t + 1} dt - \ln|t + 1| \right] = \\
&= 6 \left[\int (t^2 - t + 1) dt - \ln|t + 1| \right] = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t + 1| \right) + C = \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t + 1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C
\end{aligned}$$

б) В этом случае $a = b = d = 1$, $c = 0$. Сделаем подстановку $1 + x = t^6$ (6-наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{x + \sqrt{1 + x}}{\sqrt[3]{1 + x}} dx &= \left[\begin{array}{l} 1 + x = t^6 \Rightarrow x = t^6 - 1 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^6 - 1 + t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt = \\
&= 6 \int (t^9 + t^6 - t^3) dt = 6 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = 6t^4 \left(\frac{t^6}{10} + \frac{t^3}{7} - \frac{1}{4} \right) + C = \\
&= 6\sqrt[3]{(1 + x)^2} \cdot \left(\frac{1 + x}{10} + \frac{\sqrt{1 + x}}{7} - \frac{1}{4} \right) + C.
\end{aligned}$$

в) В этом случае $a = -1$, $b = c = d = 1$. Сделаем подстановку $\frac{1 - x}{1 + x} = t^2$.

Отсюда $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ и, значит,

$$dx = \frac{(1 - t^2)'(1 + t^2) - (1 - t^2)(1 + t^2)'}{(1 + t^2)^2} dt = -\frac{4t}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} &= \left[\frac{1-x}{1+x} = t^2 \right] = \int t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2} = 4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2 \left(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \operatorname{arctg} t \right) + C = \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C = \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x} + 1} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \end{aligned}$$

2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$.

Решение.

Это интеграл типа 2. Применим подстановку $x = 2 \sin t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx &= \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2} \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \int \frac{(4-4 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}{2^6 \sin^6 t} \cdot 2 \cos t dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t \cdot \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t \cdot d(\operatorname{ctg} t) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^5 t}{5} + C = \\ &= -\frac{1}{20} \cdot \operatorname{ctg}^5 \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}. \end{aligned}$$

Здесь в последнем равенстве использована формула:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} = \left[\sin t = \frac{x}{2} \right] = \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{3x - 5}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}} dx$.

Решение.

Это интеграл типа 3. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$9 + 6x - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3((x - 1)^2 - 4) = 3(4 - (x - 1)^2)$$

и сделаем подстановку $t = x - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 5}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3x - 5}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1 \\ dx = dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3(t + 1) - 5}{\sqrt{4 - t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3t - 2}{\sqrt{4 - t^2}} dt = \sqrt{3} \int \frac{t dt}{\sqrt{4 - t^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{d(4 - t^2)}{\sqrt{4 - t^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{t}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - t^2}}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{t}{2} + C = \\ &= -\sqrt{9 + 6x - 3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x - 1}{2} + C. \end{aligned}$$

4. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx$.

Решение.

Представим данный интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + 3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} dx$.

Теперь видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином вида 4, при этом $m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{3}$. Так как в данном случае

$$\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}} = 2 - \text{целое число, то следует применить подстановку 2), т. е.}$$

$$1 + 3x^{\frac{2}{3}} = t^3. \quad \text{Следовательно,} \quad x = \frac{1}{3\sqrt{3}}(t^3 - 1)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{и,} \quad \text{значит,}$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(t^3 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot t^2 dt. \quad \text{Таким образом,}$$

$$\int x^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + 3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} dx = \int \frac{\sqrt{t^3 - 1}}{\sqrt{3}} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t^3 - 1} \cdot t^2 dt = \frac{1}{2} \int (t^3 - 1)t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^6 - t^3) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{t^7}{14} - \frac{t^4}{8} + C =$$

$$= \frac{1}{14} \sqrt[3]{(1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2})^7} - \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2})^4} + C.$$