

Лекция 26. Определённый интеграл.

Определенный интеграл Римана

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Произведем разбиение R отрезка $[a, b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Выберем на каждом из получившихся отрезков по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Составим сумму

$$S_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

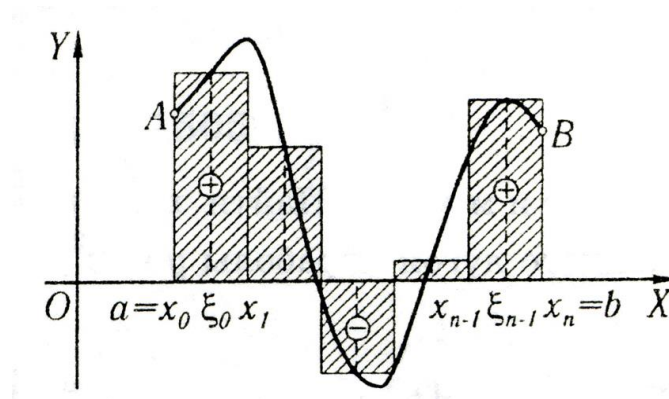


Рисунок .1

Сумма S_R называется *интегральной суммой Римана*, соответствующей разбиению R . Геометрически S_R представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников (см. рис. 1).

Пусть $n \rightarrow \infty$ так, чтобы все $\Delta x_i \rightarrow 0$, т.е. $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Если при этом последовательность интегральных сумм S_R стремится к конечному пределу, не зависящему от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_i , то этот предел называется *определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* и

обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_R = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i . \quad (1)$$

Если существует определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема* на этом отрезке.

Теорема 1. Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Таким образом, ограниченность является необходимым условием интегрируемости. Достаточным условием интегрируемости является непрерывность функции.

Теорема 2. Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

На самом деле интегрируемыми будут также функции, имеющие на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода. Такие функции называются кусочно-непрерывными.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *кусочно-непрерывной* на этом отрезке, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) и существуют конечные пределы на концах интервала

$$\lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_{i+1} - 0} f(x).$$

Теорема 3. 1) Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a, b]$ и $\forall x \in (a, b) f(x) = g(x)$. Тогда

если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Таким образом, изменение значения функции на концах отрезка (а, вообще говоря, и в любом конечном числе точек отрезка) не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если, конечно, данная функция интегрируема.

1. Свойства определенного интеграла

1. Свойство аддитивности: Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ интегрируема и на $[a, c]$ и на $[c, b]$, и при этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Справедливо следующее:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Свойство линейности: если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, и при этом

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

4. Свойство монотонности: если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, и при этом

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2. Теоремы о среднем

Теорема 4. (Первая теорема о среднем). Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и $m = \inf_{[a, b]} f(x)$, $M = \sup_{[a, b]} f(x)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (9.2)$$

Доказательство. Так как $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$, то по свойству монотонности

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx. \quad (9.3)$$

По определению определенного интеграла (9.1) и по свойству линейности имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &= m \int_a^b dx = m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \\ &= m(x_n - x_0) = m(b-a). \end{aligned}$$

Аналогично $\int_a^b M dx = M(b-a)$. Тогда из (9.3) получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

что и требовалось.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует число $\xi \in [a, b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

В самом деле, так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ и по свойству функций, непрерывных на отрезке, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений $m = \min_{[a,b]} f(x)$ и $M = \max_{[a,b]} f(x)$, тогда справедлива первая теорема о среднем. Разделим неравенство (9.2) на $b-a > 0$, получим

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

По свойству функций, непрерывных на отрезке, существует $\xi \in [a, b]$, такое что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Теорема 5. (Вторая теорема о среднем). Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и, кроме того, $g(x) \geq 0$, то

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx, \quad (4)$$

где $m = \inf_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{[a,b]} f(x)$.

Доказательство. Так как $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$ и $g(x) \geq 0$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Тогда по свойству монотонности

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

ИЛИ

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует число $\xi \in [a, b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по свойству функций, непрерывных на отрезке, существуют $\alpha, \beta \in [a, b]$, такие что $f(\alpha) = m = \min_{[a, b]} f(x)$ и

$f(\beta) = M = \max_{[a, b]} f(x)$, тогда справедлива вторая теорема о среднем. Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то

$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$. Если $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, то разделим неравенство (9.4) на $\int_a^b g(x) dx$, получим

$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$. Снова по свойству функций, непрерывных на отрезке, существует

$\xi \in [a, b]$, такое что $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ или $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.

3. Интеграл как функция верхнего предела

Определим функцию $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, где $x \in [a, b]$. Эта функция называется

функцией верхнего предела.

Перечислим свойства функции $F(x)$.

1. Функция верхнего предела $F(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, причем

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

2. Функция верхнего предела $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

В самом деле, найдем приращение функции верхнего предела

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

Так как функция $f(t)$ интегрируема на $[a, b]$, то $f(t)$ ограничена на этом отрезке, т.е.

$\exists M \forall t \in [a, b] |f(t)| \leq M$. Тогда

$$\begin{aligned} |\Delta F| &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq \int_x^{x+\Delta x} M dt = \\ &= M \int_x^{x+\Delta x} dt = M \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = M \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \\ &= M (x + \Delta x - x) = M \Delta x. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F = 0$, а это означает, что функция

$F(x)$ непрерывна.

3. Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция верхнего предела $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, причем $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

В самом деле, покажем, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$ или $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x) \right) = 0$, где

$x \in [a, b]$. Для этого оценим разность $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x)$. Имеем

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} f(x) \Delta x \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt \right| \leq \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt.$$

При этом мы использовали равенство $\Delta x = \int_x^{x+\Delta x} dt$, которое получается из определения определенного интеграла:

$$\int_x^{x+\Delta x} dt = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ , такое, что если $|\Delta x| < \delta$, то $|\Delta f(x)| = |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon$. Но тогда $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ для любого $t \in [x, x + \Delta x]$. Поэтому

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x) \right| \leq \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon dt = \frac{1}{\Delta x} \varepsilon \int_x^{x+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x} \varepsilon \Delta x = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x) \right) = 0$ или $F'(x) = f(x)$.

4. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi(x)$ – некоторая (любая) ее первообразная, тогда справедлива *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (5)$$

Эта теорема является центральной теоремой интегрального исчисления. Первообразная $\Phi(x)$ вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$: $\int f(x)dx = \Phi(x) + C$. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла, или первообразной, и простой подстановке пределов интегрирования.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – функция верхнего предела. Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$. В этом случае справедливо равенство $F(x) - \Phi(x) = C$ или $F(x) = \Phi(x) + C$, где $C = const$. Тогда

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C. \quad (6)$$

Подставим в равенство (6) $x = a$. Получим $\int_a^a f(t)dt = \Phi(a) + C$ или $\Phi(a) + C = 0$. Отсюда находим $C = -\Phi(a)$. Тогда равенство (6) примет вид

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Подставим теперь в последнее равенство $x = b$. Получим формулу (5).

Замечание. Отметим еще раз, что формула Ньютона-Лейбница применима только в том случае, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Например, при

вычислении интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ формулу (1) применять нельзя, так как функция $f(x) = \frac{1}{x}$

разрывна в точке $x = 0 \in [-1, 1]$.

5. Методы вычисления определенного интеграла

Методы вычисления определенного интеграла аналогичны методам вычисления неопределенного интеграла.

1. Замена переменной интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \quad a \leq \varphi(t) \leq b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

2. Формула интегрирования по частям.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$. Если $x=1$, то $t=0$. Если $x=e$, то $t=1$.

Следовательно,

$$I = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда находим

$$I = \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3 \cos(\pi/3)} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{12} \right) + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{12} \right).$$

6. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если известна первообразная функции $f(x)$, то можно применить формулу Ньютона-Лейбница. Но мы знаем, что не всегда первообразная существует и тогда возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

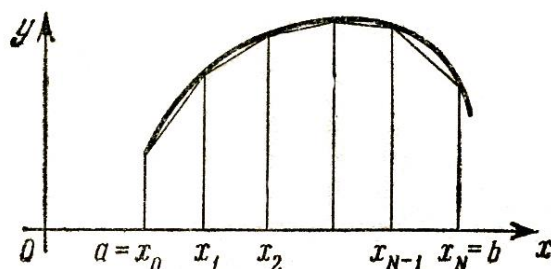
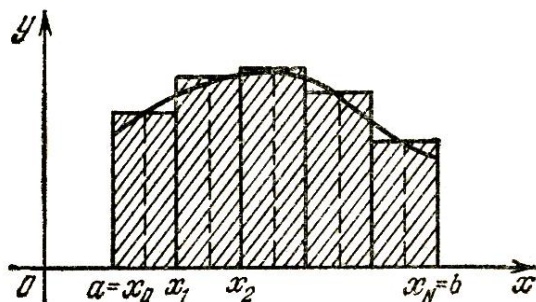
1. Формула прямоугольников.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей. См. рис. 2. Тогда $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. В качестве ξ_i возьмем точки $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Тогда по определению определенного интеграла получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left(f \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right) + f \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \dots + f \left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right).$$

Это и есть *квадратурная формула прямоугольников*.



2. Формула трапеций.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей. Тогда интеграл приближенно будет равен сумме площадей трапеций, вписанных в криволинейную трапецию. См. рис. 3.

Имеем $S_i = \Delta x \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx S_1 + S_2 + \dots + S_n = \\ &= \Delta x \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \\ &= \Delta x \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

Последняя формула называется *квадратурной формулой трапеций*.

Замечание. Формулы прямоугольников и трапеций точны для многочленов не выше первой степени, т.е. для линейных функций $y = Ax + B$. В этом смысле формула трапеций не имеет никакого преимущества перед формулой прямоугольников.

3. Формула парабол. Формула Симпсона.

Рассмотрим на плоскости три точки $A(-\Delta x, y_0)$, $B(0, y_1)$, $C(\Delta x, y_2)$. Известно, что через три точки на плоскости можно провести единственную параболу $y = ax^2 + bx + c$. Поскольку точки A , B и C лежат на параболе, то должны выполняться равенства

$$y_0 = a(\Delta x)^2 - b\Delta x + c, \quad y_1 = c, \quad y_2 = a(\Delta x)^2 + b\Delta x + c.$$

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой параболой на отрезке $[-\Delta x, \Delta x]$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c) dx = \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_{-\Delta x}^{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta x}{3} (2a(\Delta x)^2 + 6c) = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Полученная формула $S = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$ называется *формулой Симпсона*.

Из этой формулы, перейдя от отрезка $[-\Delta x, \Delta x]$ к отрезку $[a, b]$, получается *квadrатурная формула парабол*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Отметим, что эта формула точна для многочленов третьей степени.

Разделим теперь отрезок $[a, b]$ на четное число равных частей. Тогда $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$,

а интеграл можно приближенно вычислить следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Из формулы Симпсона имеем:

$$S_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$S_2 = \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

.....

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Тогда получаем *обобщенную квадратурную формулу парабол*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_{2n}).$$