Лекция 27. Несобственные интегралы.

9.2. Несобственные интегралы.

При введении определённого интеграла предполагалось, что подынтегральная функция ограничена, а интервал интегрирования конечен. Несобственные интегралы являются обобщением определённых интегралов на случай неограниченных функций и бесконечных пределов интегрирования. В связи с этим различают два типа несобственных интегралов: с бесконечными пределами интегрирования (несобственные интегралы 1-го рода) и от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода).

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на каждом отрезке $a \leq x \leq b$ для любого $b > a$. Предел

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначается следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

При этом если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если же предел I равен бесконечности или не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

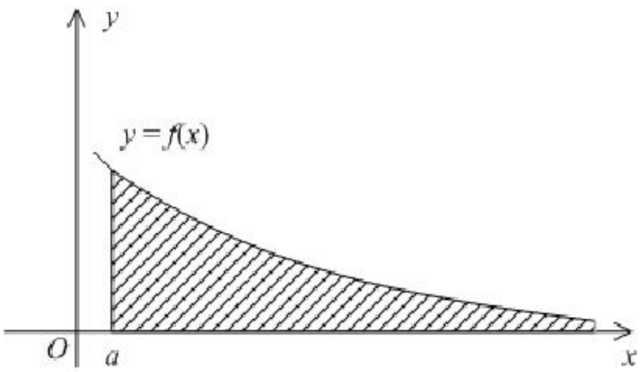

Рисунок 4

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a$, $f(x) \geq 0$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он равен площади заштрихованной на рисунке 4 неограниченной области.

Аналогично можно определить несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

где c – произвольное число. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Если несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ расходятся, а предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx$ существует, то он называется главным значением несобственного интеграла. Его обозначают $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Это значит, что интеграл сходится и его значение равно $\pi/2$. Заметим, что тем самым мы вычислили площадь бесконечно длинной области под графиком $y = \frac{1}{1+x^2}$, лежащей над положительной полуосью (рис. 5).

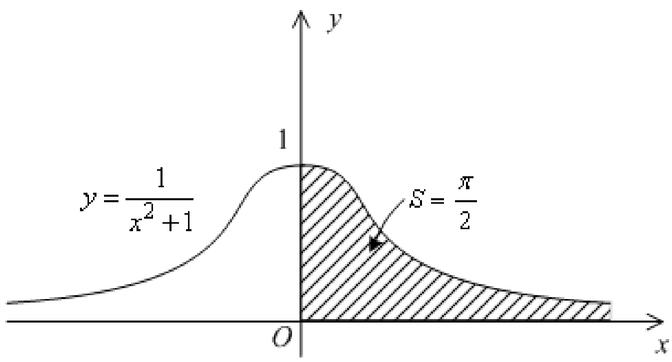

Рисунок 5

2) При $\alpha = 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

Геометрически это означает, что площадь под графиком $y = \frac{1}{x}$, лежащая от 1 до $+\infty$, бесконечно велика (несмотря на то, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает и стремится к 0 при $x \to +\infty$; это стремление к 0 недостаточно быстрое для того, чтобы интеграл сходился).

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1,\\ +\infty & \text{при } \alpha<1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\textit{сходится} & \textit{при } \alpha>1,\\ \textit{расходится} & \textit{при } \alpha\le 1.\end{cases}$$

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом отрезке $a\le x\le b-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<b-a$, но $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$. Тогда предел

$$J=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

называется несобственным интегралом 2-го рода от функции $f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. Если же предел J равен бесконечности или не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Если функция $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ непрерывна, $f(x) \ge 0$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то он равен площади заштрихованной на рис. 6 неограниченной области.

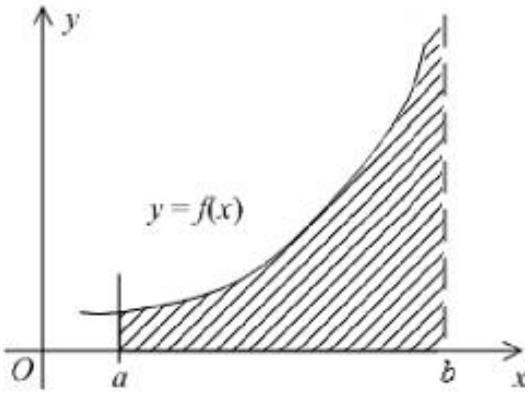

Рисунок 6.

Аналогично определяется несобственный интеграл для функции, которая на каждом отрезке $a + \varepsilon \le x \le b$, где $0 < \varepsilon < b - a$ ограничена и интегрируема, но $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Пусть $f(x)$ не ограничена в окрестности обоих концов отрезка $[a,b]$. и пусть c – любая внутренняя точка отрезка $[a,b]$: $a < c < b$. Если каждый из интегралов $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ сходится, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Если, наконец, $f(x)$ не ограничена в окрестности некоторой внутренней точки c отрезка $[a,b]$ и каждый из интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ сходится, то по определению полагают:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

или, подробнее,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

Оба предела нужно вычислять по отдельности.

Если в этом смысле несобственный интеграл расходится, но существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right],$$

то его называют главным значением несобственного интеграла в смысле Коши. Он обозначается тем же символом $\int_a^b f(x)dx$, что и сам интеграл, либо $v.p.\int_a^b f(x)dx$.

Например, главное значение интеграла $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a < c < b)$ равно

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln|-\varepsilon| - \ln|a-c| + \ln|b-c| - \ln|\varepsilon| = \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|;$$

тогда как сам несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ не существует.

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

1) Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 \le x \le 1-\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, ограничена и непрерывна, следовательно, интегрируема. Предельное значение

$$J = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

существует. Таким образом, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. Заметим, что функция $f(x)$ не определена при $|x| \ge 1$ и стремится к $+\infty$ при $x \to 1-0$, так что соответствующая фигура – неограниченна, а её площадь равна значению вычисленного несобственного интеграла (рис. 7).

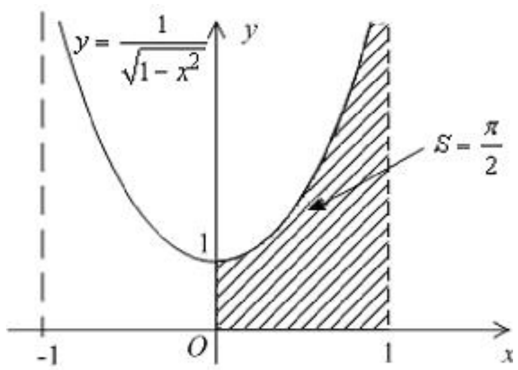

Рисунок 7.

2) Если $\alpha \ne 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{\textit{при} } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{\textit{при} } \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \frac{1}{\varepsilon} = +\infty .$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \textit{сходится} \quad \textit{при } \alpha < 1, \\ \textit{расходится} \ \textit{при } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

3. Признаки сходимости несобственных интегралов

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится он или нет.

Сформулируем признаки сходимомти для интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; для других несобственных интегралов справедливы аналогичные утверждения.

Теорема 1. (Признак сравнения). Если на промежутке $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Геометрически утверждение почти очевидно: оно означает, что если площадь под верхним графиком конечна (на рис. 8 она заштрихована), то конечна и имеет меньшее значение площадь под нижним графиком (она имеет двойную штриховку).

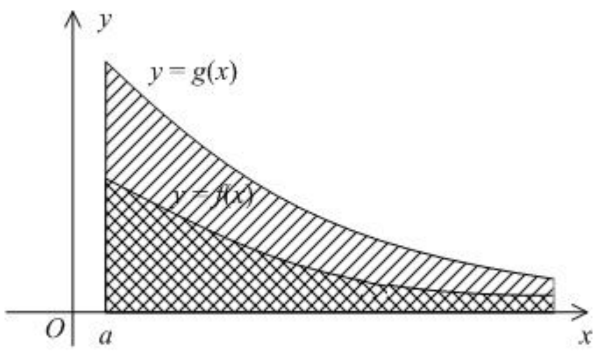

Рисунок 8

Второе утверждение геометрически означает, что если площадь, обозначенная на рисунке двойной штриховкой, бесконечна, то, тем более, бесконечна и вся заштрихованная площадь.

Теорема 2. (Предельный признак сравнения). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$, $0<K<\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

В качестве функций сравнения в случае $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ особенно удобно использовать функцию $g(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, а в случае интеграла $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ от неограниченной в окрестности точки $x=b$ функции – функцию $g(x)=\dfrac{1}{(x-b)^{\alpha}}$.

Примеры. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2(1+3^x)}$; 2) $\int\limits_0^{1}\dfrac{dx}{\sin x}$

1) При $x\geq 1$ имеем $\dfrac{1}{x^2(1+3^x)}<\dfrac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}=1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1).

2) Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ имеет на отрезке $[0;1]$ единственный разрыв в точке $x=0$. Рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Интеграл $\int\limits_0^{1}\dfrac{dx}{x}$ расходится. И так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, то интеграл $\int\limits_0^{1}\dfrac{dx}{\sin x}$ также расходится.