

## Определённый интеграл

Основные свойства определённого интеграла:

$$1. \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

$$5. \int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx, \text{ где } C \text{ – постоянная.}$$

6. Оценка определённого интеграла: если  $m \leq f(x) \leq M$  на  $[a, b]$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Правила вычисления определённых интегралов:

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , т. е.  $F'(x) = f(x)$ .

2. Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке  $[a, b]$ .

3. Замена переменной:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

где  $f(x)$  – функция, непрерывная на  $[a, b]$ ,  $x = \varphi(t)$  – функция, непрерывная вместе со своей производной на отрезке  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ .

4. Если  $f(x)$  – нечётная функция, т. е.  $f(-x) = -f(x)$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Если  $f(x)$  – чётная функция, т. е.  $f(-x) = f(x)$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

### Примеры решения задач

1. Вычислить интегралы: а)  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ ; б)  $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ .

**Решение.**

а) Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  на отрезке  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$  имеет

первообразную  $F(x) = \operatorname{tg} x$ . Тогда по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) Выделяя полный квадрат в знаменателе под корнем, находим:

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{3} \Big|_{-4}^{-2} =$$

$$= \arcsin 0 - \arcsin \left(-\frac{2}{3}\right) = \arcsin \frac{2}{3}.$$

2. Оценить интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$ .

**Решение.**

Поскольку  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ , имеем:

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{5+3\cos^2 x} \leq \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{10}.$$

3. Вычислить интегралы: а)  $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ ; в)  $\int_2^3 x(3-x)^7 dx$ .

**Решение.**

Вычислим эти интегралы с помощью замены переменной.

а) Применим подстановку  $\sqrt{x} = t$ . Находим новые пределы интегрирования:

$x$	1	9
$t = \sqrt{x}$	1	3

Тогда

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \left[ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int_1^3 \frac{2t dt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5} dt = \int_1^3 \left( 1 - \frac{5}{2t+5} \right) dt =$$

$$= t \Big|_1^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \ln|2t+5| \Big|_1^3 = 3 - 1 - \frac{5}{2} (\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2} \ln \frac{11}{7}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{в) } \int_2^3 x(3-x)^7 dx = \left[ \begin{array}{l} t = 3-x \Rightarrow x = 3-t \\ dx = -dt \end{array} \right] = \int_1^0 (3-t)t^7 (-dt) = \int_1^0 (t^8 - 3t^7) dt =$$

$$= \left( \frac{t^9}{9} - 3\frac{t^8}{8} \right) \Big|_1^0 = -\frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{19}{72}.$$

4. Вычислить интегралы: а)  $\int_1^9 (x+1) \ln x dx$ ; б)  $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$ .

**Решение.**

Эти интегралы вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям.

$$\text{а) } \int_1^e (x+1) \ln x dx = \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x+1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right] = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \Big|_1^e -$$

$$-\int_1^e \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} + e - \left( \frac{x^2}{4} + x \right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2 + 5}{4}$$

$$\text{б) } \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi - \ln 4}{4}.$$

5. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^2 \frac{x^5 + 7x^4 + x^3 - 5x^2 - 2}{x^3 + x} \, dx.$$

**Решение.**

Это интегралы в симметричных пределах. Значит, нужно проверить подынтегральные функции на предмет чётности-нечётности.

а) Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$  – нечётная, значит,

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = 0.$$

б) В данном случае подынтегральная функция не является ни чётной, ни нечётной, но её можно представить в виде суммы таких функций:

$$\frac{x^5 + 7x^4 + x^3 - 5x^2 - 2}{x^3 + x} = \frac{x^5 + x^3}{x^3 + x} + \frac{7x^4 - 5x^2 - 2}{x^3 + x}.$$

Тогда

$$\int_{-2}^2 \frac{x^5 + 7x^4 + x^3 - 5x^2 - 2}{x^3 + x} dx = \int_{-2}^2 \frac{x^5 + x^3}{x^3 + x} dx + \int_{-2}^2 \frac{7x^4 - 5x^2 - 2}{x^3 + x} dx =$$

$$= 2 \int_0^2 \frac{x^3(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} dx + 0 = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$