

Несобственные интегралы

Несобственными называются интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода) и интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода).

Несобственные интегралы 1-го рода определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

Эти интегралы называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы в правых частях равенств. Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то соответствующие интегралы называются *расходящимися*.

Несобственные интегралы 2-го рода определяются следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \text{ если функция } y = f(x) \text{ имеет бесконечный}$$

разрыв при $x = b$;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \text{ если функция } y = f(x) \text{ имеет бесконечный}$$

разрыв при $x = a$;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx, \text{ если функция } y = f(x)$$

имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, $a < c < b$.

Критерии сходимости формулируются для интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

для других несобственных интегралов справедливы аналогичные утверждения.

1. Если на промежутке $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует

сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходимость

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и существует предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < \infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно

оба сходятся или оба расходятся.

В качестве *функции сравнения* в случае $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ особенно удобно

использовать функцию $g(x) = \frac{1}{x^p}$ ($p > 0$), а в случае интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от

неограниченной в окрестности точки $x = b$ функции – функцию

$g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$. Можно показать (см. лекции!), что интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$, а интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ (как и интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Примеры решения задач

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$; б) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$.

Решение.

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b$$

Такой предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^{-1} = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{a} \right) = 1,$$

г. е. несобственный интеграл сходится и его значение равно 1.

в) Подынтегральная функция – чётная, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = 2 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x}{2} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2}$$

то есть интеграл сходится и его значение равно $\pi/2$.

2. Исследовать на сходимость интегралы: а) $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$.

Решение.

а) Здесь $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} > 0$ при $x \in [1; +\infty)$, при этом $\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Но

интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ расходится ($p = \frac{2}{3} < 1$). Поэтому, согласно признаку

сравнения 1, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ расходится.

б) Здесь $f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5} > 0$ при $x \in [1; +\infty)$. Рассмотрим функцию

$g(x) = \frac{1}{x^5}$, интеграл от которой $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ сходится ($p = 5 > 1$). А так как

существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{2+x+3x^5} = \frac{1}{3} \neq 0$, то интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$ также сходится (признак сравнения 2).

3. Вычислить несобственные интегралы или установить их

расходимость: а) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x=0$ неограниченна,

поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится.

б) Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 3$. Поэтому

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т. е. интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

в) Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 1$. Поэтому

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon_2}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} =$$

$$= 3 \cdot \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (x-1)^{1/3} \Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + 3 \cdot \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (x-1)^{1/3} \Big|_{1+\varepsilon_2}^2 =$$

$$= 3 \cdot \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\sqrt[3]{-\varepsilon_1} - \sqrt[3]{-2}) + 3 \cdot \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (1 - \sqrt[3]{\varepsilon_2}) = 3\sqrt[3]{2} + 3,$$

т. е. интеграл сходится.

4. Исследовать на сходимость интегралы: а) $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$;

б) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} dx.$

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{3x^2 + \sqrt[3]{x}} > 0$ при $x \in (0; 1]$ и

неограниченна в точке $x = 0$, при этом $\frac{1}{3x^2 + \sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Но интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

сходится ($p = \frac{1}{3} < 1$). Поэтому, согласно признаку сравнения 1, интеграл

$\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$ также сходится.

б) Функция $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке

$x = 1$. Перепишем её в виде $f(x) = \frac{\cos^2 x}{(1+x)^{2/3}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{2/3}}$ и сравним с функцией

$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{2/3}}$. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{2/3}}$ сходится ($p = \frac{2}{3} < 1$). Так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x}{(1+x)^{2/3}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{2/3}} \cdot \frac{(1-x)^{2/3}}{1} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}} \neq 0,$$

то, согласно предельному признаку сравнения 2, интеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} dx$

также сходится.