Приложения определённого интеграла

1). Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ $[f(x) \geq 0]$, осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$. Если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox ($f(x) < 0$), то её площадь определяется так: $S = -\int_a^b f(x)dx$.Эти формулы можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (1)$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$ можно найти следующим образом:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (2)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt, \qquad (3)$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$ $[y(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2]$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (4)$$

2). Вычисление длины дуги кривой.

Длина l кривой, являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (5)$$

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ $[x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции], где $t_1 \leq t \leq t_2$, длина дуги находится по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt. \qquad (6)$$

Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ в полярных координатах, то длина дуги равна

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \qquad (7)$$

3). Вычисление объёма тела.

Объём V тела, площади сечений которого плоскостями, перпендикулярными оси Ox известны ($S=S(x)$, $a\le x\le b$), вычисляется по формуле:

$$V=\int\limits_{a}^{b}S(x)dx. \qquad (8)$$

Если вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y=f(x)\ge 0$, отрезком $a\le x\le b$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, то объём тела вращения равен $V=\pi\cdot\int\limits_{a}^{b}y^2dx$.

Примеры решения задач

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$, прямыми $x=-\frac{7}{6}\pi$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$.

Решение.

Фигура имеет вид, представленный на рис.1. Её площадь определяется по формуле (1):

$$S=\int\limits_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{4}}|\sin x|dx=\int\limits_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi}\sin x\,dx-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=$$

$$=-\cos x\Big|_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi}+\cos x\Big|_{-\pi}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{1}{2}(8-\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

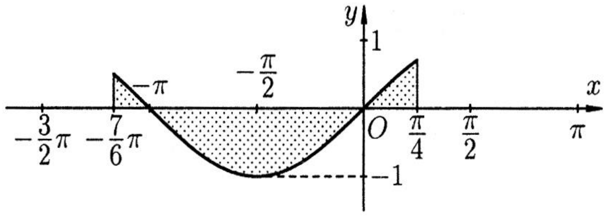

Рис. 1.

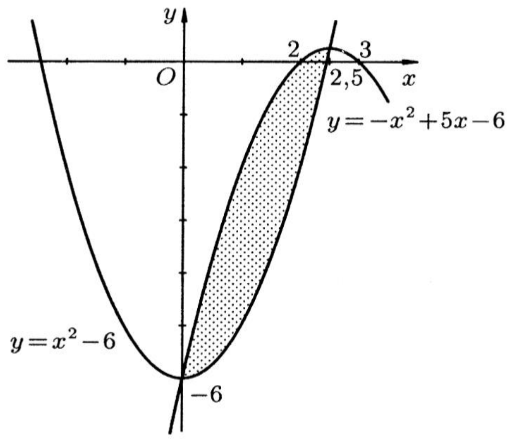

Рис. 2.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6$ и $y=-x^2+5x-6$.

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-6 \\ y=-x^2+5x-6 \end{cases},$$

из которой находим: $x_1=0$, $x_2=2{,}5$. Искомую площадь (см. рис. 2) определяем по формуле (2):

$$S=\int\limits_0^{2{,}5}(-x^2+5x-6-x^2+6)\,dx=\int\limits_0^{2{,}5}(-2x^2+5x)\,dx=\frac{125}{24}.$$

3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды (рис. 3) с уравнением $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox.

Решение.

Здесь $x'(t) = 2(1 - \cos t)$, а t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Следовательно, по формуле (3)

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2 (1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}) dt = 4 \cdot \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

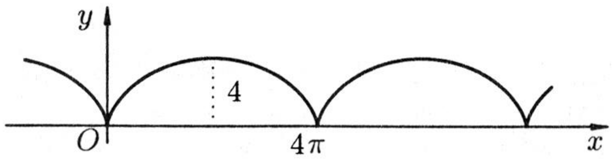

Рис. 3.

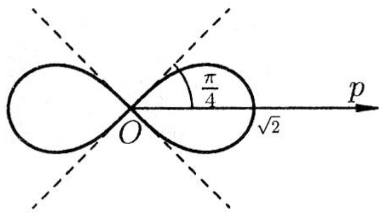

Рис. 4.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $r^2 = 2\cos 2\varphi$.

Решение.

Четвёртой части искомой площади (рис. 4) соответствует изменение φ от 0 до $\pi/4$. По формуле (4) находим:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2\cos 2\varphi \, d\varphi = 2\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2.$$

5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ ($y \ge 0$) от точки с абсциссой $x = 0$ до точки $x = 1$.

Решение.

Здесь $y = x^{3/2}$. Тогда $y' = \frac{3}{2} x^{1/2}$. Тогда по формуле (5)

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Bigg|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1\right).$$

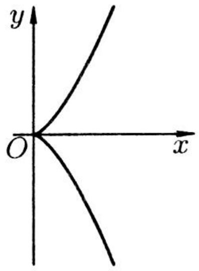

Рис. 5.

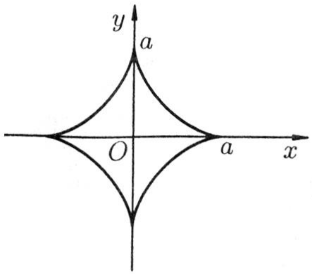

Рис. 6.

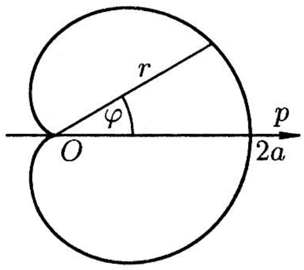

Рис. 7.

6. Найти длину астроиды: $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

Решение.

$x' = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t$, $y' = 3a \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$. Тогда

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{9a^2 \cos^2 t \cdot \sin^2 t} = 3a \cdot \cos t \cdot \sin t = \frac{3a}{2} \sin 2t.$$

Теперь по формуле (6) с учётом симметрии линии (рис. 6) находим

$$l = 4 \cdot \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -6a \cdot \frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

7. Найти длину кардиоиды: $r = a(1+\cos\varphi)$.

Решение.

Сначала найдём половину длины кривой, изображённой на рис. 7, по формуле (7), учитывая, что $r' = -a\sin\varphi$:

$$\frac{l}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Значит, $l = 8a$.

8. Найти объём эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение.

Рассекая эллипсоид (рис. 8) плоскостью, параллельной плоскости Oyz на расстоянии x от неё ($-a \le x \le a$), в сечении получим эллипс с уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (8), имеем

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

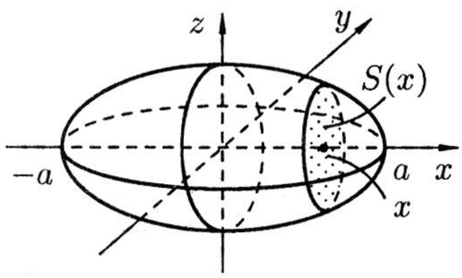

Рис. 8.

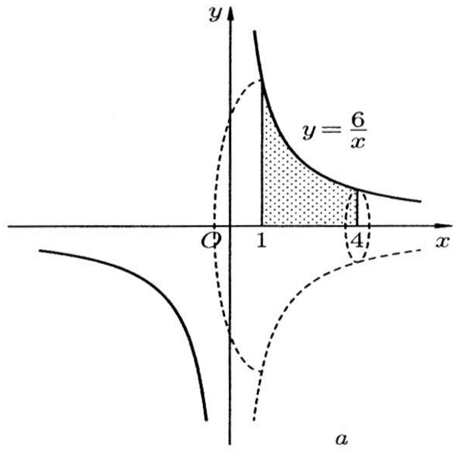

Рис. 9.

9. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

Решение.

Для тела, изображённого на рис. 9, находим:

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = 36\pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = 36\pi.$$