Лекция 29. Функции нескольких переменных

Предварительные определения

Все определения и утверждения, как правило, будем приводить для функций двух переменных. Если нет особых оговорок, то определения и утверждения легко переносятся на случай функций большего числа переменных.

Пусть R^2 есть арифметическое 2-мерное векторное пространство, $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$. Компоненты вектора (x, y) этого пространства можно понимать как координаты точки плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy. Наоборот, каждой точке $M(x, y)$ однозначно соответствует элемент (x, y) пространства R^2. Тогда подмножество множества R^2 можно изобразить некоторой совокупностью точек плоскости Oxy, а элементы R^2 обозначать $M(x, y)$ так же как и точки плоскости Oxy. Говоря о подмножестве множества R^2, всегда будем представлять это подмножество как множество точек плоскости Oxy.

Расстояние между элементами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пространства R^2 или точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ плоскости точками Oxy есть величина

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Для трех точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ получаем

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2},$$

где $a_1 = x_3 - x_1, a_2 = y_3 - y_1$, $b_1 = x_2 - x_3, b_2 = y_2 - y_3$.

С использованием известного неравенства Коши – Буняковского для действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

при $n=2$, получаем:

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2} =$$

$$=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}=\rho(M_1, M_3)+\rho(M_3, M_2).$$

Полученное неравенство

$$\rho(M_1, M_2)\le\rho(M_1, M_3)+\rho(M_3, M_2)$$

называется неравенством треугольника.

Множества точек

$$U(M_0, \delta)=\left\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

или

$$U(M_0, \delta)=\{(x, y) \mid |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\},$$

где $M_0(x_0, y_0)$, называются соответственно *открытым кругом радиуса* δ *с центром в точке* $M_0(x_0, y_0)$ и *открытым квадратом со сторонами* 2δ *и с центром* $M_0(x_0, y_0)$. Эти множества часто используются в рассуждениях и носят специальные названия - δ-окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$. Часто вместо обозначения $U(M_0, \delta)$ будем использовать обозначение $U(M_0)$.

Некоторая точка $M'(x', y')$ по определению есть *внутренняя точка множества* D, если множество D полностью содержит некоторую окрестность $U(M', \delta)$ точки $M'(x', y')$. Если каждая точка множества D является внутренней, то D называется *открытой областью* или, короче, *областью*.

Область D называется *связной*, если любые ее две точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в области D.

Точка $M'(x', y')$, не принадлежащая области D, называется *граничной* для области D, если каждая окрестность точки $M'(x', y')$ содержит точки, принадлежащие D. Множество всех граничных точек области называется *границей* этой *области*. Например, границами многоугольника, круга являются соответственно многоугольник, окружность.

Множество, образованное областью и ее границей, называется *замкнутой областью*.

Если D область, то граница ее обозначается символом ∂D. Тогда $\overline{D} = D \cup \partial D$ есть замкнутая область.

Пусть D есть некоторое множество точек на плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy. Множество D называется *ограниченным*, если некоторый замкнутый круг $\overline{U}(M_0, R)$, где M_0 - фиксированная точка, целиком содержит множество D.

10.2. Последовательности точек. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие точка $(x_n, y_n) \in R^2$, то говорят, что определена *последовательность точек из пространства* R^2:

$$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots .$$

Последовательность кратко обозначают символами $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{(x_n, y_n)\}$, а так же $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{M_n\}$.

По определению последовательность называется *ограниченной*, если ограниченным является множество

$$\{(x_1, y_1), ((x_2, y_2)), \ldots, (x_n, y_n), \ldots\}.$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ по определению является *пределом последовательности* $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N, зависящее от числа ε, такое, что для всякого $n \geq N$ верно неравенство $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$.

Последовательность, обладающая пределом, называется *сходящейся*, и в этом случае пишут $M_n \to M_0$, $n \to \infty$.

Пример. Показать, что последовательность $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $(0, 0)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и произвольно, $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n+1}\right)$ и $M_0(0, 0)$. Следуя определению предела последовательности, получаем неравенство:

$$\rho(M_0, M_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{n+1} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{(n+1)^2}} < \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{n}.$$

Полагаем: $\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно неравенству $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$. Если $\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} < 1$ или $\varepsilon \geq \sqrt{5}$, то полагаем: $N = 1$ и тогда для всех $n \geq N$ верно $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ или $\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$. Отсюда $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$. Если $\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \geq 1$ или $0 < \varepsilon \leq \sqrt{5}$, то полагаем: $N = \left[\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда из неравенства $n \geq N$ следует неравенство $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ и, следовательно, неравенство $\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$. Отсюда $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$.

Таким образом, для произвольного и положительного ε нашлось натуральное число

$$N = \begin{cases} 1, \varepsilon > \sqrt{5}, \\ \left[\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}\right] + 1, 0 < \varepsilon \leq \sqrt{5}, \end{cases}$$

такое, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$. По определению данная последовательность сходится к точке $M_0(0, 0)$.

Поскольку $\{\rho(M_0, M_n)\}$ есть числовая последовательность, то можно так сформулировать определение предела: точка $M_0(x_0, y_0)$ является пределом последовательности $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(M_0, M_n) = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы последовательность $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ имела своим пределом точку $M_0(x_0, y_0)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ и } \lim_{n \to \infty} y_n = y_0.$$

Доказательство. Доказательство основано на неравенствах: для любых чисел a_1 и a_2 верно

$$|a_i| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \le |a_1| + |a_2|,\ i = 1, 2,$$

справедливость которых проверяется непосредственным возведением в квадрат.

В силу этих неравенств для точек $M_0(x_0, y_0)$, $M_n(x_n, y_n)$ справедливы неравенства

$$|x_n - x_0| \le \rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

$$|y_n - y_0| \le \rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

Пусть $M_n \to M_0,\ n \to \infty$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_0, M_n) = 0$. Тогда переходим к пределу в неравенстве $|x_n - x_0| \le \rho(M_0, M_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_0, M_n) \ge \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0|,\ 0 \ge \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0|,\ \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0,$$

где последнее равенство равносильно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Аналогично устанавливаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Пусть теперь верны равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, которые равносильны соответственно равенствам $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - y_0| = 0$. Переходим к пределу в неравенстве $\rho(M_0, M_n) \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_0, M_n) \le \lim_{n\to\infty} \left(|x_n - x_0| + |y_n - y_0|\right) = \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| + \lim_{n\to\infty} |y_n - y_0| = 0.$$

Получили: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_0, M_n) = 0$. Теорема доказана.

Некоторые свойства сходящихся последовательностей.

1) Сходящаяся последовательность имеет только единственный предел.

Доказательство. Пусть $M_n \to M_0$ и $M_n \to M_0'$ при $n \to \infty$. Тогда имеем неравенство

$$\rho(M_0, M_0') \le \rho(M_0, M_n) + \rho(M_0', M_n).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_0, M_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_0', M_n) = 0$, то $\rho(M_0, M_0') \le 0$. Отсюда $\rho(M_0, M_0') = 0$ и тогда $M_0 = M_0'$. Свойство доказано.

2) Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. В силу определения предела последовательности и, если $M_n \to M_0$, $n \to \infty$, то для некоторого значения ε и его соответствующего значения N внутри окрестности

$$U(M_0, \varepsilon) = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \right\}$$

окажутся все элементы последовательности с номерами большими или равными N, вне этой окрестности только лишь $N - 1$ членов последовательности. Положим:

$$d = \max\{\rho(M_0, M_1), \rho(M_0, M_2), ..., \rho(M_0, M_{N-1}), \varepsilon\}.$$

Тогда все элементы последовательности будут принадлежать замкнутому кругу

$$\bar{U}(M_0, d) = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le d \right\}.$$

Это означает ограниченность последовательности. Свойство доказано.

Последовательность $\{M_n\}$ *называется фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что для любых натуральных $n \ge N$ и $m \ge N$ выполняется неравенство $\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$.

Из неравенств

$$|x_m - x_n| \le \rho(M_n, M_m) \le |x_m - x_n| + |y_m - y_n|,$$

$$|y_m - y_n| \le \rho(M_n, M_m) \le |x_m - x_n| + |y_m - y_n|$$

следует, что для того чтобы последовательность $\{M_n\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ были фундаментальными. Тогда в силу теоремы 1 и критерия Коши сходимости числовых последовательностей справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. (критерий сходимости последовательности точек из пространства R^2). Для того чтобы последовательность $\{M_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Аналогично случаю числовых последовательностей определяется понятие подпоследовательности. Если из некоторых членов последовательности $\{M_n\}$ составлена новая последовательность $\{M_{n_k}\}$, в которой порядок следования ее членов совпадает с порядком их следования в исходной последовательности (из неравенства $k' > k''$ следует неравенство $n_{k'} > n_{k''}$), то последовательность $\{M_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{M_n\}$.

Теорема 3. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится.

Доказательство. Пусть $\{M_{n_k}\}$ - произвольная подпоследовательность сходящейся к точке M_0 последовательности $\{M_n\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что неравенство $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$ имеет место для всех $n \geq N$. Следовательно, найдется элемент $M_{n_{k'}}$ последовательности $\{M_n\}$ с номером $n_{k'} > N$ и тогда для всех элементов подпоследовательности $\{M_{n_k}\}$ с номерами $k > k'$ справедливо неравенство $\rho(M_0, M_{nk}) < \varepsilon$. По определению последовательность $\{M_{n_k}\}$ сходится к точке M_0. Теорема доказана.

Теорема 4. Из любой ограниченной последовательности точек R^2 можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть последовательность $M_n(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена. Тогда найдется замкнутая окрестность $\overline{U}(M_0(x_0, y_0), R)$ такая, что $M_n \in \overline{U}(M_0, R)$ для всех n и тогда верны неравенства

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq R,$$

$$|y_n - y_0| \le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \le R.$$

Неравенства $|x_n - x_0| \le R$, $|y_n - y_0| \le R$, выполнимые для всех n, означают, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены.

Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности из числовой последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ ограниченной последовательности $\{y_n\}$ также ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_{k_1}}\}$. Поскольку всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, то сходится подпоследовательность $\{x_{n_{k_1}}\}$. Таким образом, последовательность $\{M_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{M_{n_{k_1}}\}$. Теорема доказана.

Как и в случае множества действительных чисел в пространстве R^2 вводится понятие бесконечно удаленной точки ∞. Эта воображаемая точка плоскости определяется с помощью окрестности.

По определению *бесконечно удаленной точкой* является такая точка, для которой любое множество $U(\infty, \varepsilon) = \left\{ M \mid \rho(O, M) > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$ (где число $\varepsilon > 0$ любое) является окрестностью.

Отметим, что бесконечно удаленная точка определяется без знака.

По определению *последовательность* $\{M_n\}$ *сходится (или стремится) к бесконечно удаленной точке* ∞, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что для любого $n \ge N$ верно $\rho(O, M_n) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Если последовательность сходится к бесконечно удаленной точке, то пишут

$$\lim_{n \to} M_n = \infty$$

Некоторое множество D из пространства R^2 называется *неограниченным множеством*, если для любого $\varepsilon > 0$ верно $D \cap U(\infty, \varepsilon) \ne \varnothing$.

Последовательность $\{M_n\}$ по определению является *неограниченной последовательностью*, если множество

$$\{M_1, M_2, ..., M_n, ...\}$$

неограниченно.

Теорема 5. Всякая неограниченная последовательность содержит подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.

Доказательство. Пусть последовательность $M_n(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, ...$, неограниченная. Тогда найдется точка M_{n_1} такая, что $\rho(O, M_{n_1}) > 1$. Среди точек M_{n_1+1}, M_{n_1+2}, … исходной последовательности найдется точка M_{n_2} такая, что $\rho(O, M_{n_2}) > 2$. Вообще существует точка M_{n_k} такая, что

$$n_k > n_{k-1},\ \rho(O, M_{n_k}) > k,\ k = 2, 3, ...$$

Таким образом, построена подпоследовательность $\{M_{n_k}\}$. Покажем, что она неограниченная.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Всегда найдется натуральное число N такое, что $N - 1 \le \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] < N$. Все точки M_{n_k} номерами $k \ge N$ принадлежат $U(\infty, \varepsilon)$. По определению последовательность $\{M_{n_k}\}$ является неограниченной. Теорема доказана.

Понятие функции нескольких переменных

Пусть D - произвольное множество точек пространства R^2. Если каждой точке M множества D поставлено в соответствие некоторое число из множества действительных чисел R (см. рисунок 1), то говорят, что на множестве D определена *функция*. Пусть числовые переменные x и y принимают соответственно значения первой и второй координат точек множества D, числовая переменная z - значения, равные числам, которые ставятся в соответствие точкам множества D. Функцию, определенную выше, записывают в виде $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$ и называют *функцией двух независимых переменных* x *и* y *или аргументов* x *и* y. Переменная z называется *зависимой* *переменной* или *функцией*. Множество D называется *областью определения функции* $z = f(M)$, а совокупность всех значений зависимой переменной z - *областью значений*.

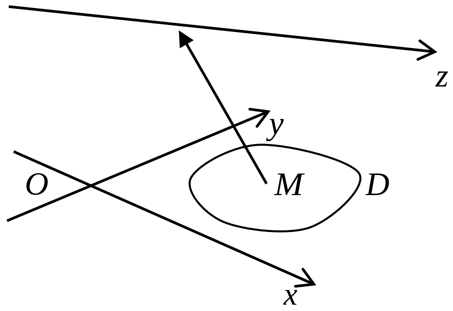


Рисунок 1

Множеством D обычно является открытая или замкнутая область.

Геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ может служить поверхность $S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ в пространстве с прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$.

Приведем примеры функций и их геометрические изображения.

Пример. 1) Пусть $z = x^2 + y^2$, $D = R^2$. Для данной функции выражение $f(x, y) = x^2 + y^2$ определяет правило, по которому точка $M(x, y)$ сопоставляется числу z. Областью значений функции является множество $E = [0; +\infty)$, поверхность S - параболоид (см. рисунок 2).

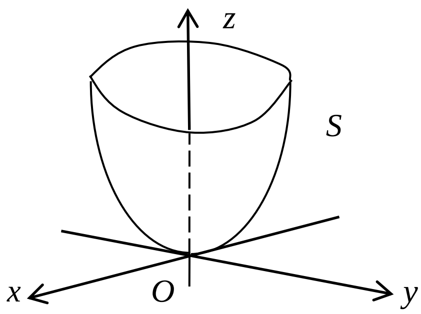
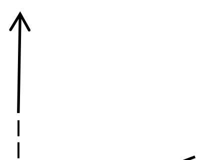


Рисунок 2

Пример. 2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Область D не задана. Областью определения функции является область определения выражения $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Она задается неравенством $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$. Последнее неравенство определяет замкнутый круг в координатной плоскости Oxy. Область значений функции есть отрезок $E = [0; 1]$. Поверхность S - верхняя половина сферы (см. рисунок 3).



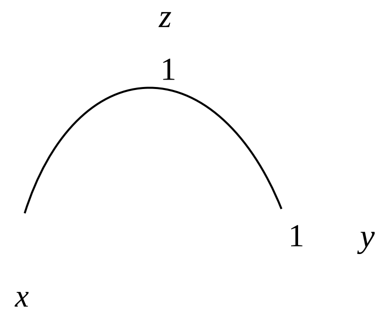


Рисунок .3

Функция $z = f(x, y)$ по определению является элементарной функцией, если выражение $f(x, y)$ предписывает выполнение конечного числа только арифметических действий над значениями переменных x, y и константами, а также конечного числа операций, определяемых элементарными функциями одной переменной.

Примеры. 1) $P(x, y) = y^4 + 2x^2y^2 - y + \sqrt{2}$, $Q(x, y) = x^5 - x^2y - 1$ - целые функции или многочлены от двух переменных соответственно 4-ой и 5-ой степени.

2) $\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \dfrac{y^4 + 2x^2y^2 - y + \sqrt{2}}{x^5 - x^2y + 1}$ - дробно рациональная функция.

3) $f(x, y) = x + \sqrt{x^2 + 2y^2 + 1}$ - иррациональная функция.

4) $f(x, y) = x^2 + \sin\left(x^2 + y^2 + 1\right)$ - трансцендентная функция.

Предел функции в точке

Проколотой δ - *окрестностью* точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество $\overset{\circ}{U}(M_0, \delta) = U(M_0, \delta) \setminus \{M_0\}$. Для проколотой окрестности будем использовать также обозначение $\overset{\circ}{U}(M_0)$.

По определению точка $M_0(x_0, y_0)$ является *предельной для множества*, если любая ее проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку этого множества.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на некоторой области D, точка $M_0(x_0, y_0)$ является предельной точкой области D. По определению *число a является пределом* $z = f(x, y)$ *в точке* M_0 *или, что то же самое при* $M \to M_0$, если какова бы ни была последовательность $\{M_n\}$ принадлежащая $D \cap \overset{\circ}{U}(M_0)$, сходящаяся к точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующая числовая последовательность значений функций $\{f(M_n)\}$ сходится к числу a.

Используют обозначения:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a, \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = a.$$

Приведем эквивалентные определения предела функции в точке.

1) Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0, y_0)$ является предельной точкой области D. *Число a называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ или, что то же самое при $M \to M_0$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которой $\rho(M_0, M) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(M) - a| < \varepsilon.$$

Первое определение и только что приведенное называются соответственно определениями по Гейне и по Коши. Равносильность их устанавливается также как и равносильность определений предела функции одной переменной по Гейне и Коши.

2) Координаты произвольной точки $M(x, y)$ из множества $D \cap \mathring{U}(M_0)$ можно записать в виде $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ при определенных значениях переменных Δx и Δy. Функцию $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ можно рассматривать как функцию переменных Δx и Δy, предел функции $z = f(x, y)$ в точке как предел функции $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ в точке $M_0'(0; 0)$. Отсюда равносильность равенств

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a \text{ и } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = a.$$

Таким образом, последнее равенство можно принять за определение предела функции $z = f(x, y)$ в точке M_0.

Пример. Показать исходя из определения, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$.

Следуя определению, рассмотрим модуль разности:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}.$$

С учетом неравенств $|x|^3=\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}\le\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $|y|^3=\left(y^2\right)^{\frac{3}{2}}\le\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, получаем:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le\frac{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное число и пусть $2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$. Положим: $\varepsilon=2\delta$ или $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из неравенства $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ будет следовать

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

и, следовательно, по определению имеем: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$.

Пример. Показать, что при $(x,y)\to(0;0)$ не существует предела функции $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Рассмотрим две последовательности $(x_n,y_n)\to(0;0)$, где $y_n=x_n$, и $(x_n',y_n')\to(0;0)$, где $y_n'=x_n'^2$ ($x_n\to 0$ при $n\to\infty$). Для первой последовательности

$$f(x_n,y_n)=\frac{x_n^3}{x_n^4+x_n^2}=\frac{x_n^3}{x_n^2\left(1+x_n^2\right)}=\frac{x_n}{1+x_n^2}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

для второй последовательности

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{x'^4_n}{x'^4_n + x'^4_n} = \frac{x'^4_n}{2x'^4_n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \text{ при } n \to \infty.$$

Получили, что для различных последовательностей, стремящихся к одной точке, соответствующие последовательности значений функции имеют различные пределы. Согласно определению предела по Гейне данная функция не имеет предела в точке $(0; 0)$.

Рассмотрим случай бесконечного предела в конечной точке.

Имеем следующие определения:

а) $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = +\infty$ означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $f(M) > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех точек M, для которых $\rho(M_0, M) < \delta$;

б) $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = -\infty$ означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $f(M) < -\frac{1}{\varepsilon}$ для всех точек M, для которых $\rho(M_0, M) < \delta$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = \infty$ означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $|f(M)| > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех точек M, для которых $\rho(M_0, M) < \delta$.

Каждому из приведенных определений соответствует эквивалентное определение в терминах приращений независимых переменных. Например, имеем равносильные равенства

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = +\infty \text{ и } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = +\infty.$$

Рассмотрим случай предела в бесконечно удаленной точке.

Число a *называется пределом функции* $z = f(x, y)$ *в бесконечно удаленной точке* ∞ *или, что то же самое при* $M \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которой $\rho(M_0, M) > \frac{1}{\delta}$, выполняется неравенство

$$|f(M)-a|<\varepsilon.$$

Используется обозначение $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,\,y)=a$.

Повторный предел функции в точке

Ранее рассмотренные пределы функции в точке называются двойными пределами. Для изучения предела функции при изменении только одной независимой переменной и фиксированном значении другой переменной вводится понятие повторного предела.

При определении повторного предела будем рассматривать в качестве окрестности предельной точки квадрат

$$U(M_0,\delta)=\{(x,\,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\},$$

предполагая, что возможно функция не определена на отрезках прямых $x=x_0$ и $y=y_0$. При фиксированном значении переменной y функция $z=f(x,y)$ становится функцией одной переменной x. Для простоты считаем, что для области определения такой функции переменной x точка x_0 является предельной. Пусть для любого фиксированного значения переменной y, удовлетворяющего неравенствам $0<|y-y_0|<\delta$, существует предел функции $z=f(x,y)$ при $x\to x_0$, вообще говоря, зависящий от y:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\text{-фикс.}}} f(x,\,y)=\varphi(y).$$

Пусть существует предел a функции $\varphi(y)$ при $y\to y_0$. В таком случае по определению в точке $M_0(x_0,\,y_0)$ существует *повторный предел* a функции $z=f(x,y)$. Обозначение повторного предела:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=a.$$

В этом обозначении $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ (y - фиксированное значение и $0<|y-y_0|<\delta$) называется внутренним пределом.

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, в котором внутренним является $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ (x - фиксированное значение и $0<|x-x_0|<\delta$).

Пример. Вычислить повторные пределы функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$.

Вычисляем сначала внутренний предел, а затем внешний:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0.$$

Аналогично получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0.$$

Теорема 6. Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ существует двойной предел:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a,$$

а также внутренние пределы в двух повторных пределах этой функции. Тогда существуют повторные пределы $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, причем каждый из них равен a.

Доказательство. Ограничимся доказательством существования повторного предела $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, причем для внутреннего предела положим $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$.

В силу существования двойного предела для произвольного числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что верно неравенство

$$|f(x, y)-a|<\varepsilon$$

для всех значений переменных x и y, удовлетворяющих неравенствам $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$. Фиксируем такое значение y, для которого выполняется неравенство $|y-y_0|<\delta$. Перейдем в неравенстве на функцию к пределу при $x \to x_0$. Так как функция $f(x, y)$ при этом стремится к пределу $\varphi(y)$, то получим неравенство

$$|\varphi(y)-a| \le \varepsilon .$$

Тогда согласно определению имеем: $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)=a$. Отсюда с учетом условия $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)=\varphi(y)$ следует

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)=a$$

Теорема доказана.

В последнем рассмотренном примере показано существование и равенство двух повторных пределов. Покажем, что двойного предела функции из этого примера не существует.

Рассмотрим последовательность точек $\{(x_n, kx_n)\}$, где число k произвольное, а $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, и соответствующую последовательность значений функции:

$$f(x_n, kx_n)=\frac{kx_n^2}{x_n^2+k^2x_n^2}=\frac{kx_n^2}{x_n^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2} .$$

При $k=1$ имеем последовательность $\{(x_n, x_n)\}$, а при $k=-1$ - последовательность $\{(x_n, -x_n)\}$. Каждая из последовательностей сходится к точке $O(0; 0)$. Пределы значений функции, соответствующие этим последовательностям, различны (они равны $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$). Следовательно, двойного предела функции в точке $O(0; 0)$ не существует. Таким образом, вообще из существования и равенства повторных пределов не следует существования двойного предела.

Непрерывность функции нескольких переменных в точке и в области

По определению *функция* $z = f(x, y)$ *непрерывна в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в некоторой полной окрестности $U(M_0)$ и

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Приведем эквивалентное определение непрерывности функции в точке.

Запишем координаты точек окрестности $U(M_0)$ в виде $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. По определению *функция* $z = f(x, y)$ *непрерывна в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 .$$

Величина $\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется *приращением функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$. Используют также записи приращения: $\Delta f(x_0, y_0)$, $\Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$. Последний предел можно записать в виде

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(M_0) = 0 \text{ или } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = 0 .$$

Приведем примеры непрерывных в точке функций с обоснованием непрерывности.

Примеры.

1). Функция $f(x, y) = C$, C является постоянной величиной, непрерывна в любой точке $M(x, y)$, поскольку $\Delta f(x, y) = C - C = 0$.

2) Функция $f(x, y) = x^2 + 2xy - 1$ непрерывна в любой точке $M(x, y)$. Действительно,

$$\Delta f(x, y) = (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)(y+\Delta y) - 1 - \left(x^2 + 2xy - 1\right) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x +$$

$$+ 2xy + 2x\Delta y + 2y\Delta x + \Delta x\Delta y - 1 - x^2 - 2xy + 1 = 2x\Delta x + 2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y + \Delta^2 x =$$

$$= 2(x+y)\Delta x + 2x\Delta y + \Delta^2 x + 2\Delta x\Delta y .$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x, y, \Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[2(x+y)\Delta x + 2x\Delta y + \Delta^2 x + 2\Delta x\Delta y\right] = 0 .$$

Если функция непрерывна в каждой точке области (открытой или замкнутой), то по определению эта функция *непрерывна в области*.

Рассмотрим свойства пределов функций двух переменных. Определение предела и непрерывности функций двух переменных дословно совпадает с определением предела и непрерывности для функции одной переменной. Все утверждения о свойствах пределов и непрерывности функций одной переменной, которые не учитывают упорядоченность точек, верны и для функций многих переменных. Приведем такие утверждения.

Теорема 7. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют конечный предел в точке M_0, то функции $f(M)+g(M)$, $f(M)g(M)$ также имеют конечный предел в этой точке. Если $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ имеет конечный предел в точке M_0. Справедливы равенства

$$\lim_{M \to M_0} \left(f(M) + g(M)\right) = \lim_{M \to M_0} f(M) + \lim_{M \to M_0} g(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y)g(x, y) = \lim_{M \to M_0} f(x, y) \cdot \lim_{M \to M_0} g(x, y),$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(x, y)} .$$

Более того, если функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M_0, то приведенные функции, полученные арифметическими действиями над функциями $f(M)$ и $g(M)$, являются непрерывными в точке M_0.

Большое значение имеет свойство сохранения знака функции нескольких переменных в окрестности точки, в которой существует конечный предел.

Теорема 8. Пусть функция $f(M)$ имеет предел, не равный нулю в точке M_0,

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, A \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $\overset{\circ}{U}(M_0)$ такая, что для любой точки $M \in \overset{\circ}{U}(M_0)$ имеет место неравенство

$$|f(M)| > \frac{|A|}{2}.$$

Более того, функция в этой окрестности $\overset{\circ}{U}(M_0)$ сохраняет знак числа A: если $A > 0$, то $f(M) > \frac{A}{2}$, если $A < 0$, то $f(M) < \frac{A}{2}$.

Для непрерывной в точке M_0 функции $f(M)$ $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ и, если $f(M_0) \neq 0$, то в окрестности $U(M_0)$ функция имеет знак $f(M_0)$.

Пусть функция $z = f(u, v)$ определена в области G, а $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ - функции независимых переменных x и y, определенные в области D. Предположим, что точка $M(x, y)$ принадлежит области D, а соответствующая точка $P(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, принадлежит области G. Тогда можно образовать функцию $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ двух переменных x и y, определенную в области D. Эта функция называется *сложной функцией*, устанавливающей зависимость значений переменной z от значений переменных x и y посредством функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Предположим, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является предельной для множества D. Рассмотрим предел сложной функции $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$. В этой постановке задачи будем также использовать и краткую запись: рассмотрим предел сложной функции $z = f(\varphi(M), \psi(M))$ при $M \to M_0$, где как обычно $M(x, y)$.

Теорема 9. Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi(M), \psi(M))$. Если существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{M \to M_0} \varphi(M) = u_0, \quad \lim_{M \to M_0} \psi(M) = v_0,$$

и конечный или бесконечный предел

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = a,$$

где $P(u, v)$, $P_0(u_0, v_0)$, то существует и предел

$$\lim_{M \to M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = a$$

сложной функции $f(\varphi(M), \psi(M))$, причем

$$\lim_{M \to M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = \lim_{P \to P_0} f(P).$$

Последнее равенство называется формулой замены переменной для пределов функций.

Доказательство. Пусть $\{M_n\}$ - произвольная последовательность точек из области D, сходящаяся к предельной точке $M_0(x_0, y_0)$ этой области. В силу существования пределов функций $u = \varphi(M)$, $v = \psi(M)$ имеем две сходящиеся последовательности $u_n = \varphi(M_n)$, $v_n = \psi(M_n)$ с пределами соответственно u_0 и v_0. Другими словами последовательность $\{P_n(u_n, v_n)\}$ сходится к точке $P_0(u_0, v_0)$. В силу существования предела функции $f(P)$ имеем: последовательность значений функции $\{f(P_n)\}$ сходится к пределу a. Таким образом, последовательность $\{f(\varphi(M_n), \psi(M_n))\}$ сходится к a. В силу произвольности последовательности $\{M_n\}$ и по определению предела функции по Гейне имеем:

$$\lim_{M\to M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = a .$$

Теорема доказана.

Если функции $u = \varphi(M)$ и $v = \psi(M)$ непрерывны в точке M_0, а функция $f(P)$ непрерывна в точке $P_0(u_0, v_0)$, где $u_0 = \varphi(M_0)$ и $v_0 = \psi(M_0)$, то

$$\lim_{M\to M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = \lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0) = f(\varphi(M_0), \psi(M_0)),$$

то есть сложная функция $f(\varphi(M), \psi(M))$ непрерывна в точке M_0.

Если в условии теоремы функция $f(P)$ непрерывна в точке P_0, то

$$\lim_{M\to M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = f(P_0(u_0, v_0)) = f\left(\lim_{M\to M_0} \varphi(M_0), \lim_{M\to M_0} \psi(M_0)\right),$$

Что означает возможность перехода под знаком непрерывной функции.

Рассмотрим частные случаи образования сложной функции двух переменных, применения формулы замены и вопрос непрерывности сложной функции.

1) Пусть $z = f(u)$ - функция одной переменной, а функция двух переменных $u = \varphi(x, y)$ определена в области D и имеет значения, принадлежащие области определения функции $z = f(u)$. Тогда возможно образование сложной функции $z = f(\varphi(x, y))$ двух переменных, определенной в области D. Если $\lim\limits_{M\to M_0} \varphi(M) = u_0$, то формула замены переменной в пределе имеет вид:

$$\lim_{M\to M_0} f(\varphi(M)) = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

Если функция $u = \varphi(x, y)$ непрерывна в точке M_0, функция $z = f(u)$ - в точке $u_0 = \varphi(M_0)$, то сложная функция $z = f(\varphi(x, y))$ будет непрерывной точке M_0.

2) Пусть $z = f(u, v)$ - функция двух переменных, определенная в области G, а функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(y)$ определены соответственно на множествах F и T, причем точка $P(u, v)$ с координатами $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(y)$ принадлежит области G. При таких

условиях возможно образование сложной функции $z = f(\varphi(x), \psi(y))$ двух переменных x и y, определенной в области $D = \{(x, y) \mid x \in F, y \in T\}$.

Формула замены переменных в пределе

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(\varphi(x), \psi(y)) = \lim_{P \to P_0} f(P).$$

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0, а функция $z = f(u, v)$ непрерывна в точке $P(u_0, v_0)$, то сложная функция $z = f(\varphi(x), \psi(y))$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ области D.

Приведем примеры применения приведенных выше утверждений в вычислениях пределов функций.

Пример. Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \left(1 + xy^2\right)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}}$.

Преобразуем выражение, записанное под знаком предела.

$$\left(1 + xy^2\right)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}} = \left(1 + xy^2\right)^{\frac{y}{xy\left(x^6 + y\right)}} = \left(1 + xy^2\right)^{\frac{y^2}{xy^2\left(x^6 + y\right)}} = \left[\left(1 + xy^2\right)^{\frac{1}{xy^2}}\right]^{\frac{y^2}{x^6 + y}}.$$

Пусть $u = \left(1 + xy^2\right)^{\frac{1}{xy^2}}$ и $v = \dfrac{y^2}{x^6 + y}$. Поскольку

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \left(1 + xy^2\right)^{\frac{1}{xy^2}} = e, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \frac{y^2}{x^6 + y} = 3,$$

то с применением формулы замены переменных в пределе (см. теорему) получаем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\left(1+xy^2\right)^{\frac{y}{x^7y+xy^2}} = \lim_{\substack{u\to e\\ v\to 3}} u^v = e^3.$$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Положим: $u = x^2+y^2$. Применим формулу замены переменных первого частного случая. При $(x, y)\to(0;0)$ переменная величина u также стремится к нулю. Выполним замену переменной в пределе и вычислим полученный предел.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sqrt{u+1}-1} = \lim_{u\to 0}\frac{u\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{\left(\sqrt{u+1}-1\right)\left(\sqrt{u+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{u+1-1} = \lim_{u\to 0}\frac{u\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{u} = \lim_{u\to 0}\left(\sqrt{u+1}+1\right) = 2.$$

Приведенные теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями, непрерывности сложной функции и частные случай, а также определение элементарной функции двух переменных являются обоснованием следующего утверждения.

Теорема 10. Всякая элементарная функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке своей области определения.

Пример. Рассмотрим элементарную функцию $f(x, y) = \left(x^2+2xy-1\right)\sin\left(\sqrt{x}-y\right)$. Областью определения функции является множество $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, -\infty < y < +\infty\}$

Функция $\psi(x, y) = \sqrt{x}-y$ непрерывна в каждой точке множества D. Действительно, $\Delta\psi(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{x+\Delta x}-(y+\Delta y)-\sqrt{x}+y = \sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}-\Delta y$. Поскольку функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке области определения, то $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x} = \varepsilon(\Delta x)$, где функция $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Получили, что $\Delta\psi(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x)-\Delta y$. Следовательно, $\Delta\psi(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Тогда сложная функция $\sin\psi(x, y)$

непрерывна в любой точке (первый частный случай). Функция $\varphi(x, y) = \left(x^2 + 2xy - 1\right)$ непрерывна в любой точке (см. пример). Тогда произведение двух непрерывных функций $f(x, y) = \varphi(x, y)\sin\psi(x, y)$ является непрерывной функцией в любой точке множества D.

Непрерывность функции нескольких переменных в области

Установим два важных свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве. Эти свойства являются обобщениями соответствующих свойств непрерывных функций от одной переменной, заданных на отрезке.

Теорема 11. Функция $f(M)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве D, ограничена на нем.

Доказательство. Допустим противное утверждению теоремы: функция $f(M)$ не ограничена на множестве D. Тогда для любого натурального n найдется такая точка $M_n \in D$, что верно неравенство

$$\left|f(M_n)\right| > n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(M_n) = \infty$.

Полученная последовательность $\{M_n\}$ ограничена. Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{M_{nk}\}$, сходящуюся к некоторой точке $M_0 \in R^2$. Всякая окрестность точки M_0 содержит точки области D. Поэтому точка M_0 является либо внутренней точкой области D, либо ее граничной. А поскольку область D по условию замкнутая, то $M_0 \in D$. В силу непрерывности функции $f(M)$ на области D $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(M_{n_k}\right) = f(M_0)$. Так как $f(M_0)$ конечное число, то имеем противоречие с тем, что допустили. Теорема доказана.

Говорят, что функция $f(M)$ достигает на некотором множестве D своей точной верхней грани $\sup\limits_{M\in D} f(M)$ (точной нижней грани $\inf\limits_{M\in D} f(M)$), если найдется такая точка $M_0 \in D$, что $f(M_0) = \sup\limits_{M\in D} f(M)$ ($f(M_0) = \inf\limits_{M\in D} f(M)$). Также можно сказать, функция

$f(M)$ на множестве D достигает в точке $M_0 \in D$ своего максимума, равного $\sup\limits_{M \in D} f(M)$, или достигает своего минимума, равного $\inf\limits_{M \in D} f(M)$.

Теорема 12. Функция $f(M)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве D, достигает на нем своего максимума и минимума.

Доказательство. Из последней теоремы следует, что множество значений функции $f(M)$, определенной на множестве D, ограничено как сверху, так и снизу. Поэтому это множество обладает точной верхней гранью $A = \sup\limits_{M \in D} f(M)$ и точной нижней гранью $B = \inf\limits_{M \in D} f(M)$. Из свойства точной верхней грани следует, что для любого натурального числа n найдется точка $M_n \in D$ такая, что

$$A - \frac{1}{n} < f(M_n) \le A \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Полученная последовательность $\{M_n\}$ ограничена. Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{M_{nk}\}$, которая сходится к некоторой точке M_0. В силу замкнутости области D точка $M_0 \in D$ и поскольку функция $f(M)$ непрерывна на D, то $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(M_{n_k}\right) = f(M_0)$. Для подпоследовательности $\{M_{nk}\}$ имеем:

$$A - \frac{1}{n_k} < f\left(M_{nk}\right) \le A \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Предельный переход в этом двойном неравенстве при $k \to \infty$ приводит к тому, что $f(M_0) = A$. Последнее равенство записывается в виде $f(M_0) = \sup\limits_{M \in D} f(M)$.

Аналогично доказывается существование точки $M_0' \in D$ такой, что $f(M_0') = \inf\limits_{M \in D} f(M)$. Теорема доказана.

Пример. Покажем, что функция $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ на множестве $D = \left\{(x, y) \,|\, \dfrac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$ достигает своей точной верхней грани и точной нижней грани.

Для исследования прейдем к полярным координатам: $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$. Тогда

$$f(x,y)=\frac{\left(x^2\right)^2+2x^2y^2+\left(y^2\right)^2-2x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2-2\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

$$u=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=r^2-2\frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2}=r^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right).$$

Какова бы ни была точка $M(x,y)\in D$, выполняются неравенства $\frac{1}{4}\le r^2\le 1$, $\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\le 1$. Поэтому функция u ограничена: $\frac{1}{8}\le u\le 1$. Следовательно, ограничена исходная функция, $\frac{1}{8}\le f(x,y)\le 1$.

При $x=1$ и $y=0$ функция $f(x,y)$ принимает свое максимальное значение, равное 1. Если $r=\frac{1}{2}$ и $\varphi=\frac{\pi}{4}$, то величина u принимает свое наименьшее значение, равное $\frac{1}{8}$. Приведенным значениям r и φ соответствуют $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{4}$, при этих значениях переменных исходная функция принимает свое наименьшее значение $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{1}{8}$.

Если рассматривать данную функцию на множестве $D'=\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2\le 1\}$, которое не является замкнутым, то придем к выводу о недостижимости функцией своей точной нижней грани $\inf\limits_{D'} f(x,y)=0$.

Доказанные теоремы часто применяются в обосновании разрешимости экстремальных задач прикладного характера.