Лекция 30. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Частные производные функции нескольких переменных

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней для области D, в которой определена функция $z = f(x, y)$. По определению величина $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ есть *приращение функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по переменной* x. Величину $\Delta_x f(x_0, y_0)$ рассматриваем как функции переменной Δx. Для краткости эту величину будем обозначать символами $\Delta_x f(M)$, $\Delta_x f$ или $\Delta_x z$.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* x *в точке* $M_0(x_0, y_0)$.

Для такой частной производной также применяются обозначения

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \ f'_x(x_0, y_0), \ f'_x(M_0) \text{ и } z'_x(x_0, y_0), \ z'_x(M_0).$$

Отметим, что частная производная $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ есть обычная производная функции $z = f(x, y)$, если понимать эту функцию как функцию одной переменной x при фиксированных значениях переменной y.

Совершенно аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y. Приведем основное. Частная производная по переменной y есть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ есть *приращение функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по переменной* y. Обозначения:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \ f'_y(x_0, y_0), \ f'_y(M_0) \text{ и } z'_y(x_0, y_0), \ z'_y(M_0).$$

Производная $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ есть обычная производная по переменной y, если функцию $z = f(x, y)$ понимать как функцию только переменной y.

Производные $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$ называются *частными производными первого порядка функции* $z = f(x, y)$ *в точке* M_0.

Выясним геометрический смысл частных производных первого порядка.

Пусть существует производная $f'_x(x_0, y_0)$, а $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, - уравнение поверхности Σ (см. рисунок 1).

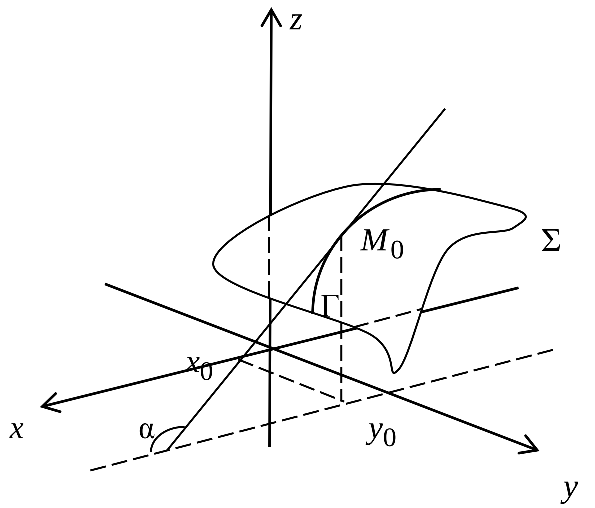


Рисунок 1

Пусть кривая Γ является сечением поверхности Σ плоскостью $y = y_0$. В этой плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, проведем касательную прямую. Тогда для угла α наклона касательной к оси Ox имеем $\operatorname{tg}\alpha = f'_x(x_0, y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл частной производной $f'_x(x_0, y_0)$.

Определим теперь частные производные функции порядков выше первого.

Если функция $z = f(x, y)$ в каждой точке $M(x, y)$ области D имеет производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, то их можно рассматривать как новые функции и вычислять их частные производные. Такие производные называются частными производными функции $z = f(x, y)$ второго порядка в точке $M(x, y)$. Приведем это определение для всех частных производных второго порядка.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ называются смешанными производными второго порядка функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$.

Приведем и другие обозначения частных производных второго порядка:

$$f''_{x^2}(x,y),\ f''_{y^2}(x,y),\ f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y).$$

Вообще, частной производной n - го порядка функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется производная по какой-нибудь переменной от некоторой производной $(n-1)$ - го порядка. Частная производная порядка n, взятая по различным переменным, называется смешанной производной порядка n. Например, если $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ есть производная второго полрядка, то $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x^2}$ или $\left(f''_{x^2}(x,y)\right)'_y=f'''_{x^2y}$ есть частная производная третьего порядка. Выражение $\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^p\partial y^r\partial x^q}$, $p+r+q=n$, означает частную производную, которая получается дифференцированием q раз по переменной x, потом r раз по переменной y, наконец, p раз по переменной x.

Пример. Вычислить значение смешанной производной третьего порядка $f'''_{y^2x}(x,y)$ в точке $M_0(1;\pi)$, если $f(x,y)=y^3+\cos xy+x+1$.

Сначала найдем производную в произвольной точке.

$$f'_y(x,y)=3y^2-\sin xy\cdot(xy)'_y=3y^2-x\sin xy,$$

$$f''_{y^2}(x, y) = 6y - \sin xy \cdot (xy)'_y = 6y - x\cos xy \cdot (xy)'_y = 6y - x^2\cos xy,$$

$$f'''_{y^2x}(x, y) = -2x\cos xy + x^2\sin xy \cdot (xy)'_x = -2x\cos xy + x^2 y\sin xy.$$

Теперь вычислим значение производной в заданной точке.

$$f'''_{y^2x}(1; \pi) = -2\cos\pi + \pi\sin\pi = 2.$$

При достаточно общих условиях результат дифференцирования по различным переменным не зависит от выбора порядка переменных, по которым происходит дифференцирование.

Теорема 1. Если функция $f(M)$ определена вместе со своими частными производными $f'_x(M)$, $f'_y(M)$, $f''_{xy}(M)$ и $f''_{yx}(M)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и производные $f''_{xy}(M)$ и $f''_{yx}(M)$ непрерывны в этой точке, то

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $f'_x(M)$ по переменной y.

$$\Delta_{yx} f(M_0) = \Delta_y(\Delta_x f(M_0)) = \Delta_y(f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) =$$

$$= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) - (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)).$$

Переставим местами средние слагаемые:

$$\Delta_{yx} f(M_0) = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) - (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) =$$

$$= \Delta_x(\Delta_y f(M_0)) = \Delta_{xy} f(M_0).$$

Получили равенство повторных приращений

$$\Delta_{xy} f(M_0) = \Delta_{yx} f(M_0).$$

Введем новую функцию $g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$. Тогда

$$\Delta g(x_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = \Delta_{xy} f(M_0).$$

Применим формулу конечных приращений Лагранжа

$$\Delta_{xy} f(M_0) = \Delta g(x_0) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x,\ 0 < \theta_1 < 1.$$

Поскольку $g'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)$, то, применив формулу конечных приращений Лагранжа к функции $f'_x(M)$, получим:

$$\Delta_{xy} f(M_0) = (f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0))\Delta x =$$

$$= f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Аналогично,

$$\Delta_{yx} = f''_{yx}(x_0 + \theta'_1 \Delta x, y_0 + \theta'_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,\ 0 < \theta'_1 < 1,\ 0 < \theta'_2 < 1.$$

В силу равенства повторных приращений $\Delta_{xy} f(M_0)$ и $\Delta_{yx} f(M_0)$ имеем:

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y = f''_{yx}(x_0 + \theta'_1 \Delta x, y_0 + \theta'_2 \Delta y)\Delta x \Delta y.$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta'_1 \Delta x, y_0 + \theta'_2 \Delta y).$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ в последнем равенстве, в силу непрерывности смешанных производных в точке M_0 получим:

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Теорема доказана.

Эта теорема распостраняется на любые непрерывные смешанные производные, которые отличаются друг от друга только порядком дифференцирования. Приведем пример.

$$f'''_{xy^2} = \left(f''_{xy}\right)'_y = \left(f''_{yx}\right)'_y = f'''_{yxy} = \left(f'_y\right)''_{xy} = \left(f'_y\right)''_{yx} = f'''_{y^2x}.$$

Дифференцируемые функции. Дифференциал

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $U(M_0)$, приращения Δx и Δy таковы, что точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(M_0)$. Приращение

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

определено в окрестности $U(M_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* M_0, если существуют такие числа A и B, что в окрестности $U(M_0)$ имеет место представление

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где $o(\rho)$ некоторая функция переменной $\rho = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$, являющаяся бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ при $\rho \to 0$.

Вообще говоря, функцию $o(\rho)$ можно понимать как функции, зависящую от переменных Δx и Δy.

Пример. Пусть $f(x, y) = x^2 + xy$, а $M_0(x_0, y_0)$ - произвольная фиксированная точка. Найдем приращение функции в этой точке.

$$\Delta f(M_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0^2 - x_0 y_0 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta^2 x + x_0 y_0 + x_0\Delta y + y_0\Delta x + \Delta x\Delta y - x_0^2 - x_0 y_0 =$$

$$= (2x_0 + y_0)\Delta x + x_0\Delta y + \Delta^2 x + \Delta x\Delta y\,.$$

В полученном выражении приращения $A = 2x_0 + y_0$, $B = x_0$, а в качестве функции $o(\rho)$ можно взять $\Delta^2 x + \Delta x\Delta y$. Действительно, из того, что $\rho \to 0$ следует, что одновременно $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Далее

$$\left|\frac{\Delta^2 x + \Delta x\Delta y}{\rho} - 0\right| = \frac{\left|\Delta^2 x + \Delta x\Delta y\right|}{\rho} \le \frac{|\Delta x|^2 + |\Delta x||\Delta y|}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}|\Delta x| \le$$

$$\le \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y} = |\Delta x| + |\Delta y| \to 0 \text{ при } \rho \to 0\,.$$

Без доказательства приведем различные виды функции $o(\rho)$.

а) $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, где $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ есть функция переменных Δx и Δy такая, что $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$;

б) $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, где $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y), \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ есть функции переменных Δx и Δy такие, что $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \to 0, \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

В приращении $\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется *дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y\,.$$

Часто используются и такие обозначения дифференциала функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\mathrm{d}z(M_0),\ \mathrm{d}f(M_0),\ \mathrm{d}z(M_0, \Delta x, \Delta y),\ \mathrm{d}f(M_0, \Delta x, \Delta y).$$

Поскольку $\mathrm{d}x = \Delta x$ и $\mathrm{d}y = \Delta y$, то $\mathrm{d}z = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$.

Рассмотрим важные свойства дифференцируемых функций.

Теорема 2. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и $\mathrm{d}f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y$, Тогда существуют $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$, причем

$$A = f'_x(M_0),\ B = f'_y(M_0).$$

Доказательство. В силу дифференцируемости справедливо представление

$$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Отсюда при $\Delta y = 0$ получаем частное приращение $\Delta_x f(M_0) = A\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x, 0)\Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \varepsilon_1(\Delta x, 0)) = A,$$

так как $\varepsilon_1(\Delta x, 0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Показали существование частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x в точке M_0 и равенство $A = f'_x(M_0)$.

Аналогично устанавливается существование частной производной функции по переменной y и справедливость второго равенства утверждения теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что для дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ имеет место формула

$$\mathrm{d}z(M_0) = f'_x(M_0)\mathrm{d}x + f'_y(M_0)\mathrm{d}y.$$

Теорема 3. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Стремление величины $\rho = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$ к нулю равносильно тому, что одновременно $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. В силу определения дифференцируемой в точке функции в некоторой окрестности точки M_0 имеем представление

$$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho .$$

причем $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(M_0) = \lim_{\rho \to 0} \Delta f(M_0) = \lim_{\rho \to 0} \left[A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho\right] = 0 .$$

Равенство предела приращения функции в точке M_0 означает непрерывность функции в этой точке. Теорема доказана.

Вообще из непрерывности не следует дифференцируемости функции. Рассмотрим пример функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Как элементарная функция эта функция непрерывна в любой точке плоскости и, в частности, в точке $O(0; 0)$. Однако эта функция не имеет частных производных в точке O. К примеру, рассмотрим отношение частного приращения функции в точке O по переменной x к Δx.

$$\frac{\Delta_x f(O)}{\Delta x} = \left.\frac{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}{\Delta x}\right|_{\Delta y = 0} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \Delta x > 0, \\ -1, \Delta x < 0. \end{cases}.$$

Следовательно, предела отношения не существует и не существует частной производной по переменной x в точке O. Если предположить, что данная функция дифференцируема в точке O, то получим противоречие с утверждением теоремы 2.

Теорема 2 дает необходимое условие дифференцируемости. Достаточные условия дифференцируемости функции приведем в следующей теореме, которую оставим без доказательства.

Теорема 4. Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности $U(M_0)$ имеет частные производные $f'_x(M)$, $f'_y(M)$, которые непрерывны в точке M_0. Тогда функция дифференцируема в точке M_0.

Рассмотрим свойства дифференциала. Предположим дифференцируемость функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ в точке $M(x, y)$. Тогда справедливы следующие равенства.

а) $\mathrm{d}f(M) = 0$, если $f(M)$ есть постоянная функция;

б) $\mathrm{d}[f(M)+g(M)]=\mathrm{d}f(M)+\mathrm{d}g(M)$;

в) $\mathrm{d}[f(M)g(M)]=g(M)\mathrm{d}f(M)+f(M)\mathrm{d}g(M)$. Как частный случай этого равенства имеем: $\mathrm{d}[Cf(M)]=C\mathrm{d}f(M)$, если C есть постоянная величина, не зависящая от точки $M(x, y)$;

г) $\mathrm{d}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{g(M)\mathrm{d}f(M)-f(M)\mathrm{d}g(M)}{g^2(M)}$, если $g(M)\neq 0$.

Доказательство. Ограничимся доказательством свойства в) и при доказательстве применим формулу для дифференциала.

$$\mathrm{d}[f(M)g(M)]=[f(M)g(M)]'_x\mathrm{d}x+[f(M)g(M)]'_y\mathrm{d}y=$$

$$=f'_x(M)g(M)\mathrm{d}x+f(M)g'_x(M)\mathrm{d}x+f'_y(M)g(M)\mathrm{d}y+f(M)g'_y(M)\mathrm{d}y=$$

$$=g(M)\left(f'_x(M)\mathrm{d}x+f'_y(M)\mathrm{d}y\right)+f(M)\left(g'_x(M)\mathrm{d}x+f(M)g'_y(M)\mathrm{d}y\right)=$$

$$=g(M)\mathrm{d}f(M)+f(M)\mathrm{d}g(M).$$

Если положить $g(M)\equiv C$ и учесть равенство $\mathrm{d}g(M)=0$, то получим частный случай: $\mathrm{d}[Cf(M)]=C\mathrm{d}f(M)$. Свойство доказано.

Производные сложной функции

Теорема 5. Пусть функция $z=f(u,v)$ дифференцируема в точке $P_0(u_0,v_0)$, функции $u=\varphi(x, y)$ и $v=\psi(x, y)$ - в точке $M_0(x_0, y_0)$, причем $u_0=\varphi(M_0)$, $v_0=\psi(M_0)$. Тогда сложная функция $z=f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеют место равенства

$$f'_x(\varphi(M_0), \psi(M_0))=f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_x(M_0),$$

$$f'_y(\varphi(M_0), \psi(M_0))=f'_u(P_0)\varphi'_y(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_y(M_0).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение сложной функции $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ в точке M_0.

$$\Delta f(\varphi(M_0), \psi(M_0)) = f(\varphi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), \psi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - f(\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0)).$$

Преобразуем приращение с помощью равенств

$$\Delta\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \varphi(x_0, y_0), \ \Delta\psi(x_0, y_0) = \psi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \psi(x_0, y_0),$$

которые запишем в виде $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$. Тогда

$$\Delta f(\varphi(M_0), \psi(M_0)) = f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) = \Delta f(u_0, v_0).$$

В силу дифференцируемости функции $z = f(u, v)$ в точке $P_0(u_0, v_0)$ имеем представление

$$\Delta f(u_0, v_0) = f'_u(u_0, v_0)\Delta u + f'_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \varepsilon_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v,$$

где функции ε_1, ε_2 стремятся к нулю при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$. Поскольку функции $u = \varphi(x, y)$ и $v = \psi(x, y)$ непрерывны в точке M_0, то при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ верно $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$. Тогда ε_1, ε_2 стремятся к нулю и при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

В силу дифференцируемости функций $u = \varphi(x, y)$ и $v = \psi(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ справедливы представления

$$\Delta u = \varphi'_x(x_0, y_0)\Delta x + \varphi'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon'_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon'_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

$$\Delta u = \psi'_x(x_0, y_0)\Delta x + \psi'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon''_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon''_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

с функциями $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$, $\varepsilon''_1, \varepsilon''_2$ стремящимися к нулю при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\Delta f(\varphi(M_0), \psi(M_0)) = f'_u(u_0, v_0)(\varphi'_x(M_0)\Delta x + \varphi'_y(M_0)\Delta y + \varepsilon'_1\Delta x + \varepsilon'_2\Delta y) +$$

$$+f'_v(u_0,v_0)\left(\psi'_x(M_0)\Delta x+\psi'_y(M_0)\Delta y+\varepsilon''_1\Delta x+\varepsilon''_2\Delta y\right)+$$

$$+\varepsilon_1(\Delta u,\Delta v)\left(\varphi'_x(M_0)\Delta x+\varphi'_y(M_0)\Delta y+\varepsilon'_1\Delta x+\varepsilon'_2\Delta y\right)+$$

$$+\varepsilon_2(\Delta u,\Delta v)\left(\psi'_x(M_0)\Delta x+\psi'_y(M_0)\Delta y+\varepsilon''_1\Delta x+\varepsilon''_2\Delta y\right)=$$

$$=\left(f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_x(M_0)\right)\Delta x+\left(f'_u(P_0)\varphi'_y(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_y(M_0)\right)\Delta y+$$

$$+\left(f'_u(P_0)\varepsilon'_1+f'_v(P_0)\varepsilon''_1+\varepsilon_1\varepsilon'_1+\varepsilon_2\varepsilon''_1\right)\Delta x+\left(f'_u(P_0)\varepsilon'_2+f'_v(P_0)\varepsilon''_2+\varepsilon_1\varepsilon'_2+\varepsilon_2\varepsilon''_2\right)\Delta y\,.$$

В полученном представлении приращения $\Delta f\left(\varphi(M_0),\psi(M_0)\right)$ величины $f'_u(P_0)\varepsilon'_1+f'_v(P_0)\varepsilon''_1+\varepsilon_1\varepsilon'_1+\varepsilon_2\varepsilon''_1$ и $f'_u(P_0)\varepsilon'_2+f'_v(P_0)\varepsilon''_2+\varepsilon_1\varepsilon'_2+\varepsilon_2\varepsilon''_2$ стремятся к нулю при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Поэтому сложная функция $z=f\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)$ является дифференцируемой в точке M_0 по определению.

При $\Delta y=0$ приращения $\Delta z=\Delta f\left(\varphi(M_0),\psi(M_0)\right)$, $\Delta u=\Delta\varphi(x_0,y_0)$, $\Delta v=\Delta\psi(x_0,y_0)$ можно понизать как частные приращения по переменной x. Поэтому имеем равенство

$$\Delta f_x\left(\varphi(M_0),\psi(M_0)\right)=\left(f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_x(M_0)\right)\Delta x+$$

$$+\left(f'_u(P_0)\varepsilon'_1+f'_v(P_0)\varepsilon''_1+\varepsilon_1\varepsilon'_1+\varepsilon_2\varepsilon''_1\right)\Delta x\,.$$

Поделим это равенство на Δx и найдем предел правой части полученного равенства при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_x\left(\varphi(M_0),\psi(M_0)\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_x(M_0)\right)+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'_u(P_0)\varepsilon'_1(\Delta x,0)+f'_v(P_0)\varepsilon''_1(\Delta x,0)+\varepsilon_1(\Delta_x u,\Delta_x v)\varepsilon'_1(\Delta x,0)+\varepsilon_2(\Delta_x u,\Delta_x v)\varepsilon''_1(\Delta x,0)\right)=$$

$$=f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0)+f'_v(P_0)\psi'_x(M_0)+f'_u(P_0)0+f'_v(P_0)0+0+0=$$

$$= f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0) + f'_v(P_0)\psi'_x(M_0).$$

Предел правой части существует. Тогда существует предел левой части и

$$f'_x(\varphi(M_0), \psi(M_0)) = f'_u(P_0)\varphi'_x(M_0) + f'_v(P_0)\psi'_x(M_0).$$

Аналогично устанавливается вторая формула утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи сложной функции.

1) Пусть $z = f(u)$, $u = \varphi(x, y)$ и в некоторой области изменения переменных x и y определена сложная функция $z = f(\varphi(x, y))$. Функция $u = \varphi(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $z = f(u)$ - в точке $u_0 = \varphi(M_0)$. Тогда справедливы формулы

$$f'_x(\varphi(M_0)) = f'(u_0)\varphi'_x(M_0), \;\; f'_y(\varphi(M_0)) = f'(u_0)\varphi'_y(M_0).$$

2) Пусть $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$ и в некоторой области изменения переменных x и y определена сложная функция $z = f(\varphi(x), \psi(y))$. Функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(y)$ дифференцируемы соответственно в точках x_0 и y_0, а функция $z = f(u, v)$ - в точке $P_0(u_0, v_0)$, где $u_0 = \varphi(x_0)$, $v_0 = \psi(y_0)$. Тогда

$$f'_x(\varphi(x_0), \psi(y_0)) = f'_u(u_0, v_0)\varphi'(x_0), \;\; f'_y(\varphi(x_0), \psi(y_0)) = f'_v(u_0, v_0)\psi'(y_0).$$

3) Пусть $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ и в некотором промежутке изменения переменной x определена сложная функция $z = f(\varphi(x), \psi(x))$. Функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ дифференцируемы в точке x_0, а функция $z = f(u, v)$ - в точке $P_0(u_0, v_0)$, где $u_0 = \varphi(x_0)$, $v_0 = \psi(x_0)$. Тогда производная сложной функции может быть вычислена по формуле

$$f'(\varphi(x_0), \psi(x_0)) = f'_u(u_0, v_0)\varphi'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)\psi'(x_0).$$

Пример. Применим последнюю формулу для нахождения производной функции, имеющей сложное выражение:

$$y = \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}.$$

Можно записать, что $y = \frac{u}{v}$, если положить: $u = e^{\sin^2 x}$, $v = \sqrt{1+\mathrm{tg}x}$. Имеем:

$$y'_u = \frac{1}{v},\ y'_v = -\frac{u}{v^2},\ u' = e^{\sin^2 x}\left(\sin^2 x\right)' = e^{\sin^2 x} 2\sin x \cos x,$$

$$v' = \frac{(1+\mathrm{tg}x)'}{2\sqrt{1+\mathrm{tg}x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\mathrm{tg}x}} = \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}.$$

Теперь применим формулу третьего частного случая:

$$y' = y'_u u' + y'_v v' = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}} e^{\sin^2 x} 2\sin x\cos x - \frac{e^{\sin^2 x}}{1+\mathrm{tg}x}\frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}} =$$

$$= \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}\left(2\sin x\cos x - \frac{1}{2\cos^2 x(1+\mathrm{tg}x)}\right) = \frac{e^{\sin^2 x}}{2\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\cos^2 x}\left(4\mathrm{tg}x\cos^4 x - \frac{1}{1+\mathrm{tg}x}\right) =$$

$$= \frac{e^{\sin^2 x}\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)}{2\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}\left(\frac{4\mathrm{tg}x}{\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)^2} - \frac{1}{1+\mathrm{tg}x}\right).$$

Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Пусть в каждой точке $M(x, y)$ области D функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и $\mathrm{d}(M, \Delta x, \Delta y) = f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y$. Зафиксируем приращения Δx и Δy. Тогда дифференциал $\mathrm{d}(M, \Delta x, \Delta y)$ есть функция двух переменных. Если эта функция дифференцируема, то можно вычислить ее дифференциал $\mathrm{d}(\mathrm{d}f(M, \Delta x, \Delta y))$, который называется дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$. Применимы так же краткие обозначения:

$$\mathrm{d}^2 z(M),\ \mathrm{d}^2 f(M).$$

Формула для дифференциала второго порядка выводится с использованием свойств дифференциала. Предположим, что производные f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке M. Тогда

$$\mathrm{d}^2 z(M) = \mathrm{d}(\mathrm{dz}(M)) = \mathrm{d}\left(f'_x(M)\mathrm{d}x + f'_y(M)\mathrm{d}y\right) = \mathrm{d}f'_x(M)\cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}f'_y(M)\cdot \mathrm{d}y =$$

$$= \left(f''_{x^2}(M)\mathrm{d}x + f''_{xy}(M)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \left(f''_{yx}(M)\mathrm{d}x + f''_{y^2}(M)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y =$$

$$= f''_{x^2}(M)\mathrm{d}x^2 + f''_{xy}(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yx}(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(M)\mathrm{d}y^2.$$

И с учетом равенства смешанных производных получаем:

$$\mathrm{d}^2 z(M) = f''_{x^2}(M)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(M)\mathrm{d}y^2.$$

Пример. Найти дифференциал второго порядка функции $z = x\ln xy$ в произвольной точке $M(x, y)$ его существования и в точке $M_0(-1; -1)$.

Найдем частные производные второго порядка данной функции.

$$(x\ln xy)''_{x^2} = \left(\ln xy + x\frac{(xy)'_x}{xy}\right)'_x = \left(\ln xy + \frac{xy}{xy}\right)'_x = (\ln xy + 1)'_x = \frac{(xy)'_x}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x},$$

$$(x\ln xy)''_{xy} = (\ln xy + 1)'_y = \frac{(xy)'_y}{xy} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y},$$

$$(x\ln xy)''_{y^2} = x\left(\frac{(xy)'_y}{xy}\right)'_y = x\left(\frac{x}{xy}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Теперь, применив формулу для второго дифференциала, получаем:

$$\mathrm{d}^2 z(M) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{1}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y^2 .$$

Вычислив значения частных производных в точке $M_0(-1; -1)$, будем иметь:

$$\mathrm{d}^2 z(M_0) = -\mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2 .$$

По определению

$$\mathrm{d}^k z(M) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{k-1} z(M)\right)$$

есть дифференциал k - го порядка функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$. Для существования дифференциала $\mathrm{d}^k z$ в точке M, например, достаточно существования в некоторой окрестности точки M частных производных k - го порядка и непрерывности их в точке M.

Для функций двух переменных справедлива формула

$$\mathrm{d}^k z(M) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(M)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \mathrm{d}x^{k-i} \mathrm{d}y^i .$$

К примеру, для $k = 3$ с применением этой формулы получаем:

$$\mathrm{d}^3 z(M) = C_3^0 \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + C_3^1 \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + C_3^2 \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + C_3^3 \frac{\partial^3 f(M)}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3 =$$

$$= \frac{3!}{0!3!} \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + \frac{3!}{1!2!} \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + \frac{3!}{2!1!} \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{3!}{3!0!} \frac{\partial^3 f(M)}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3 =$$

$$= f'''_{x^2}(M)\mathrm{d}x^3 + 3 f'''_{yx^2}(M)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3 f'''_{y^2 x}(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{y^3}(M)\mathrm{d}y^3 .$$

Неявные функции

Если некоторая функция y, зависящая от переменной x, принимающей значения из множества X числовой оси, задана формулой $y = f(x)$, причем правая часть не содержит переменную y, то по определению функция задана *явно*.

Если для каждого значения переменной x из множества X найдется единственное значение переменной y – такое, что $F(x, y) = 0$, то получаем, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет зависимость y от x или *неявную* функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X.

В некоторых случаях уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y, например, $x^2 + y^5 = 1, y = \sqrt[5]{1 - x^2}$. Пример противоположного смысла дает уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Это уравнение неоднозначно разрешимо относительно y. К примеру, функциями, неявно определенными этим уравнением, являются $f_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$, определенные на множестве $X = [-1; 1]$. Если наложить дополнительные условия, которым должна удовлетворять неявная функция, заданная уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$, то может случиться, что такая функция будет единственной. Например, если потребовать, чтобы неявная функция была неотрицательна и определена на отрезке $X = [-1; 1]$. Таким условиям удовлетворяет функция $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Другим дополнительным может быть следующим. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ такова, что ее координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 1 = 0$, то есть $x_0{}^2 + y_0{}^2 - 1 = 0$, и $U(M_0)$ - окрестность, не пересекающаяся осью Ox (см. рисунок 2). Тогда единственной неявной функцией будет та, график которой принадлежит $U(M_0)$ с областью определения (a, b).

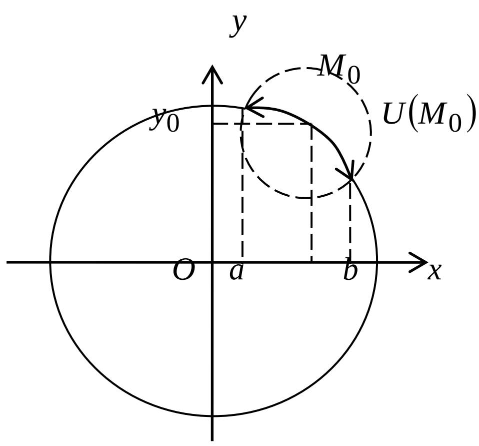


Рисунок 2

Если уравнение $F(x, y)=0$ не разрешимо однозначно относительно y, то неявную функцию приходится изучать с помощью функции $F(x, y)$ двух переменных. Часто условия существования неявной функции $y=f(x)$ на множестве X, которому принадлежит некоторая точка x_0, содержит требования непрерывности функции $F(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, $y_0=f(x_0)$, возрастание или убывание по y функции $F(x, y)$ при каждом фиксированном значении x.

Теорема 6. Пусть задано уравнение

$$F(x, y)=0,$$

причем для функции $F(x, y)$ частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ и $F(x_0, y_0)=0$, $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. Тогда существует квадрат (см. рисунок 3)

$$\Delta=\{(x, y) \mid |x-x_0|<\mu, |y-y_0|<\mu\}$$

и одна и только одна функция $y=f(x)$, определенная и непрерывная на множестве $X=(x_0-\mu, x_0+\mu)$ такая, что $y_0=f(x_0)$ и $F(x, f(x))=0$ для любого $x\in X$.

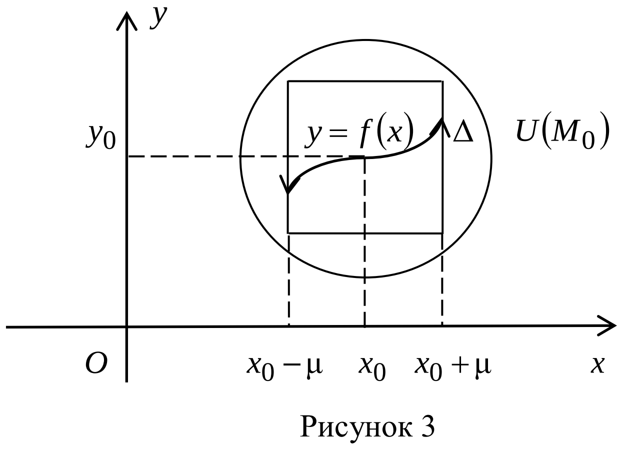


Рисунок 3

Таким образом, сформулированная теорема дает достаточные условия существования неявной функции, заданной уравнением $F(x, y)=0$ и определенной в некоторой окрестности точки x_0.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$xy + x - y - 2 = 0 .$$

Положим: $F(x, y)= xy+ x- y-2$. $F'_x(x, y)= y+1$, $F'_y(x, y)= x-1$. Функции $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ как многочлены непрерывны в любой точке. Выбрав $x_0 = 3$, $y_0 = -\frac{1}{2}$, получим:

$$F\left(3; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{2} - 2 = 0 ,\ F'_y\left(3; -\frac{1}{2}\right) = 3-1 = 2 \neq 0 .$$

Условия теоремы выполняются, следовательно, существует одна и только одна функция $y = f(x)$, непрерывная в окрестности точки $x_0 = 3$, удовлетворяющая условию $f(3) = -\frac{1}{2}$ и заданному уравнению.

Для данного примера можно найти эту функцию, существование которой установлено, если решить данное уравнение относительно y:

$$x(y+1) - y - 1 - 1 = 0 ,\ (y+1)(x-1) = 1,\ y = \frac{1}{x-1} - 1.$$

Получили, что $f(x) = \frac{1}{x-1} - 1$. В качестве окрестности точки $x_0 = 3$ можно взять множество $X = (1; 5)$. Ясно, что $f(3) = -\frac{1}{2}$ и $F\left(x, \frac{1}{x-1} - 1\right) = 0$ для любого $x \in X$.

Рассмотрим теперь вопрос о производной неявной функции.

Теорема 7. Пусть выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда неявная функция $y = f(x)$, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, имеет производную в точке x интервала $X = (x_0 - \mu, x_0 + \mu)$, которая выражается формулой

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\bigg|_{y=f(x)}.$$

Доказательство. Пусть приращение Δx таково, что $(x-\Delta x, x+\Delta x)\subset X$. Тогда в точке x определено приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - y$, где $y = f(x)$. Отсюда $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$. В силу утверждения предыдущей теоремы

$$F(x, y) = 0,\ F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x)) = 0.$$

Тогда для приращения функции $F(x, y)$ имеет место равенство

$$\Delta F(x, y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y) = 0.$$

В силу условий функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$ и

$$\Delta F(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при Δx и $\Delta y \to 0$. С использованием представления приращения функции $F(x, y)$ получаем равенство

$$F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y = 0.$$

Преобразуем это равенство:

$$\left(F'_y(x, y) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y + \left(F'_x(x, y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x = 0,$$

$$\left(F'_y(x, y) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y = -\left(F'_x(x, y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x, y) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}.$$

Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x, то $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функции $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F'_x(x, y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x, y) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Поскольку конечный предел отношения приращений функции и аргумента существует, то неявная функция имеет производную в точке x и верна формула

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Теорема доказана.

Если функция $F(x, y)$ дважды дифференцируема в $U(M_0)$ (см. теорему 6), то и неявная функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала $X = (x_0 - \mu, x_0 + \mu)$ имеет вторую производную

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \right).$$

Пример. Пусть неявная функция задана уравнением и соответствием между значением аргумента и функции:

$$\sin(x + y) - y = 0, \; y(\pi) = 0.$$

Найти значения первой и второй производных неявной функции в точке $x = \pi$.

Пусть $F(x, y) = \sin(x + y) - y$. Найдем частные производные.

$$F'_x(x, y) = \cos(x + y), \; F'_y(x, y) = \cos(x + y) - 1.$$

Применяя формулу для производной первого порядка, получим выражение для производной первого порядка и вычислим ее значение в указанной точке:

$$y'(x) = -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)-1}, \quad y'(\pi) = -\frac{\cos(\pi+0)}{\cos(\pi+0)-1} = -\frac{-1}{-1-1} = -\frac{1}{2}.$$

Найдем выражение для производной второго порядка, применяя правила дифференцирования частного, сложной функции и учтя полученное выражение производной y'.

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)-1}\right) = -\frac{-\sin(x+y)(1+y')(\cos(x+y)-1)+\cos(x+y)\sin(x+y)(1+y')}{(\cos(x+y)-1)^2} =$$

$$= \sin(x+y)(1+y')\frac{\cos(x+y)-1-\cos(x+y)}{(\cos(x+y)-1)^2} = \sin(x+y)\left(1-\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)-1}\right)\frac{-1}{(\cos(x+y)-1)^2} =$$

$$= -\frac{(\cos(x+y)-1-\cos(x+y))\sin(x+y)}{(\cos(x+y)-1)^3} = \frac{\sin(x+y)}{(\cos(x+y)-1)^3}.$$

Вторым искомым значением будет

$$y''(\pi) = \frac{\sin(\pi+0)}{(\cos(\pi+0)-1)^3} = \frac{0}{(-2)^3} = 0.$$

Рассмотрим случай неявной функции двух переменных.

Пусть функция $u = F(x, y, z)$ трех переменных x, y, z определена в некоторой пространственной области Ω. Если для значений координат x, y каждой точки $M(x, y)$ области D уравнение $F(x, y, z) = 0$ однозначно разрешимо относительно z, то говорят, что в области D определена *неявная функция* $z = f(x, y)$, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Вообще уравнение $F(x, y, z) = 0$ может и не определять никакой функции, а может определять множество функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ при любых значениях x, y не разрешимо относительно z и не определяет неявной функции. Напротив, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ для любой точке круга $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ не однозначно разрешимо относительно z и задает, к примеру, функции $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, определенные в круге D.

Сформулируем достаточные условия существования и единственности неявной функции двух переменных.

Теорема 8. Пусть в уравнении

$$F(x, y, z)=0$$

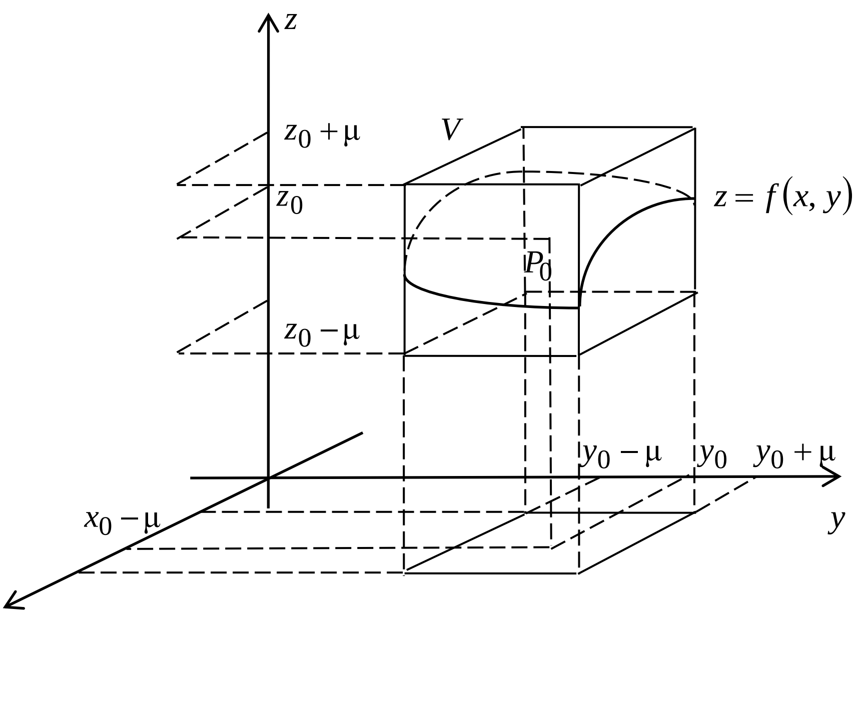
функция $F(x, y, z)$ в некоторой окрестности

$$U(P_0, \delta)=\left\{(x, y, z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$$

точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ обладает непрерывными частными производными $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$. Предположим также, что $F(x_0, y_0, z_0)=0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$. Тогда существует куб

$$V=\{(x, y, z) \mid |x-x_0|<\mu,\ |y-y_0|<\mu, |z-z_0|<\mu\}\subset U(P_0, \delta)$$

и единственная функция $z=f(x, y)$, которая определена и непрерывна в квадрате $\Delta=\{(x, y) \mid |x-x_0|<\mu, |y-y_0|<\mu\}$ (см. рисунок 4), и такая, что $z_0=f(x_0, y_0)$ и $F(x, y, f(x, y))=0$ для любой точки $M(x, y)\in\Delta$.



$x_0 + \mu$ Δ

x

Рисунок 4

В условиях этой теоремы неявная функция $z = f(x, y)$, определенная уравнением $F(x, y, z) = 0$, имеет в каждой точке $M(x, y) \in \Delta$ частные производные первого порядка, которые можно вычислить по формулам

$$f'_x(x, y) = -\left.\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}\right|_{z = f(x, y)}, \quad f'_y(x, y) = -\left.\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}\right|_{z = f(x, y)}.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $z = f(x, y)$, $M(x, y) \in D$, - уравнение поверхности Σ (см. рисунок 5). Кривые L_1, L_2 являются сечениями поверхности Σ соответственно плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$. В этих плоскостях в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, к каждой кривой сечений проведем касательные прямые. Пусть прямая N является перпендикулярной касательным и проходит через точку P_0. Все прямые, проходящие через точку P_0 перпендикулярно прямой N, образуют плоскость S, которая по определению есть *касательная плоскость к поверхности* Σ *в точке* P_0. Прямая N называется *нормальной прямой, или нормалью, к поверхности* Σ *в точке* P_0.

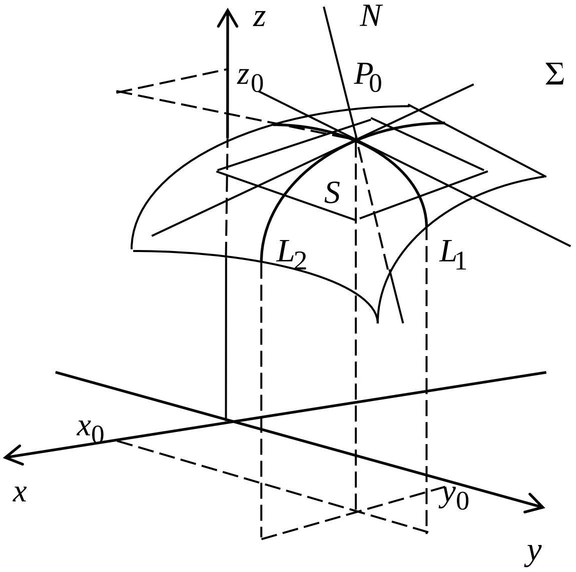


Рисунок 5

Получим уравнение касательной плоскости.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. На кривых L_1 и L_2 имеем точки $P_1(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta_y z)$, $P_2(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta_x z)$. Пусть $P(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости S', которой принадлежит треугольник $P_0P_1P_2$.

Векторы $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\overrightarrow{P_0P_1} = (0, \Delta y, \Delta_y z)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (\Delta x, 0, \Delta_x z)$ расположены в плоскости S'. Запишем необходимое и достаточное условие компланарности этих векторов:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 0 & \Delta y & \Delta_y z \\ \Delta x & 0 & \Delta_x z \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрыв определитель, получим равенство

$$(x - x_0)\Delta y \Delta_x z + (y - y_0)\Delta x \Delta_y z - (z - z_0)\Delta x \Delta y = 0,$$

которое после преобразований запишем в виде

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\Delta y + (y - y_0)\frac{\Delta_y z}{\Delta y} .$$

Если точки P_1, P_2 вдоль соответствующих кривых устремить к точке P_0, что равносильно $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, и вследствие этого $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \to f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\Delta_y z}{\Delta y} \to f'_y(x_0, y_0)$, то плоскость S' совместиться с касательной плоскостью S. Тогда уравнение касательной плоскости S получит вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Отметим, что x, y, z являются координатами точек касательной плоскости.

Если это уравнение записать в виде

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

то можно найти координаты вектора $\vec{q}$ ортогонального касательной плоскости: $\vec{q} = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right)$. Примем вектор $\vec{q}$ за направляющий вектор нормальной прямой N, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$, и запишем канонические уравнения прямой N:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пусть уравнение поверхности Σ задано уравнением $F(x, y, z) = 0$ с функцией $F(x, y, z)$, имеющей непрерывные частные производные в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и значение $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда в силу теоремы 8 в окрестности точки P_0 уравнение поверхности Σ можно выразить функцией $z = f(x, y)$. Этим самым обосновано существование касательной плоскости в точке P_0. Применив формулы для частных производных функции $z = f(x, y)$, найдем их значения:

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Исключим $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ из уравнения касательной плоскости и после преобразований получим:

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Последнее уравнение называют *уравнением касательной плоскости в точке* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *к поверхности* Σ, *заданной неявным уравнением* $F(x, y, z) = 0$.

Аналогично получаем канонические уравнения нормальной прямой N, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности Σ с неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}.$$

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}=1$$

в точке $P_0(1;1;\sqrt{2})$.

Поверхность задана неявным уравнением. Положим $F(x, y, z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}-1$ и вычислим значения частных производных функции $F(x, y, z)$ в точке P_0.

$$F'_x(P_0)=(x)\Big|_{P_0}=1,\ F'_y(P_0)=\left(\frac{y}{2}\right)\Big|_{P_0}=\frac{1}{2},\ F'_z(P_0)=\left(\frac{z}{4}\right)\Big|_{P_0}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Составим уравнение касательной плоскости и преобразуем полученное уравнение к общему виду:

$$x-1+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(z-\sqrt{2}\right)=0,\ 4x+2y+\sqrt{2}\,z-8=0.$$

Найдем канонические уравнения нормальной прямой. Координаты направляющего вектора выберем из уравнения касательной плоскости.

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Для существования касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, которая задана неявным уравнением $F(x, y, z)=0$, достаточно отличия от нуля хотя бы одной частной производной функции $F(x, y, z)$ в точке P_0.

Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим характеристики функций нескольких переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ (см. рисунок 6) и дифференцируема в этой точке. Обозначим через l луч с началом в точке M_0, который ориентирован вектором $\vec{l}$, $\vec{l}_0 = \dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ - единичный вектор. Запишем параметрические уравнения луча l:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \; t \ge 0. \end{cases}$$

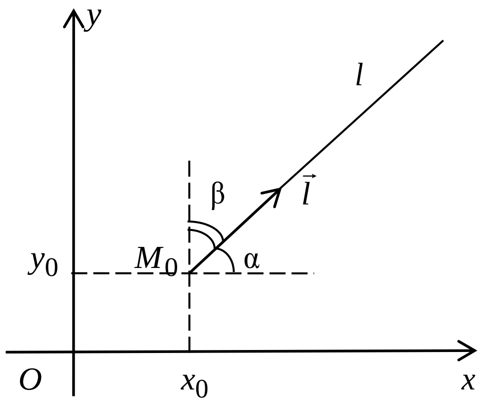


Рисунок 6

Точка $M(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ принадлежит лучу l. Длина отрезка M_0M луча равна

$$M_0M = \sqrt{(x_0 + t\cos\alpha - x_0)^2 + (y_0 + t\cos\beta - y_0)^2} = \sqrt{t^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta\right)} = t\,.$$

Функцию $z = f(x, y)$, принимающую значения в точках луча, можно определить как функцию $z = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ одного аргумента t. Производная этой функции в точке $t = 0$ называется *производной функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по направлению вектора* $\vec{l}$ и обозначается символами

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{l}}, \; \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}.$$

По определению имеем:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Поскольку

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t},$$

то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$$

и представляет собой скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$.

Формулу для вычисления производной по направлению получим с применением формулы теоремы о производных сложной функции (третий частный случай).

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = f'_x(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta)(x_0 + t\cos\alpha)'\Big|_{t=0} +$$

$$+ f'_y(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta)(y_0 + t\cos\beta)'\Big|_{t=0} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta.$$

По определению *градиентом функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ является вектор

$$\operatorname{grad} f(M_0)=\left(f'_x(M_0),\ f'_y(M_0)\right).$$

С применением формулы для производной по направлению и скалярного произведения выясним смысл градиента (необходимые обозначения приведены на рисунке 7).

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}= f'_x(M_0)\cos\alpha+ f'_y(M_0)\cos\beta=\operatorname{grad} f(M_0)\cdot\vec{l}_0=$$

$$=\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\left|\vec{l}_0\right|\cos\varphi=\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\cos\varphi .$$

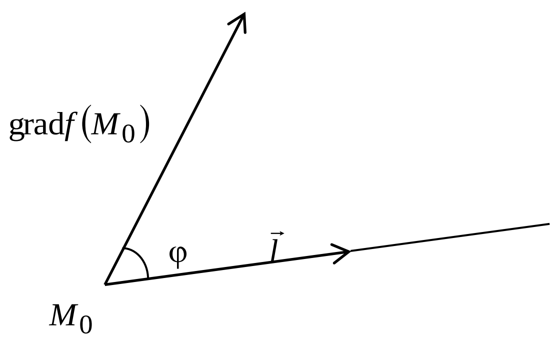


Рисунок 7

При $\varphi=0$ значение $\cos\varphi$ будет наибольшим и равным 1. При этом производная по направлению принимает наибольшее значение $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$. Следовательно, вектор $\vec{l}=\operatorname{grad} f(M_0)$ определяет направление наибольшего роста функции $z=f(x,y)$ в точке M_0, а $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$ есть скорость наибольшего роста.

В случае функции $u=f(x,y,z)$ трех переменных, определенной в окрестности $U(P_0)$ точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$ (см. рисунок 8) и дифференцируемой в этой точке, производной $u=f(x,y,z)$ в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ является величина

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0} .$$

Для вычисления производной применяется формула

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\cos\beta + f'_z(P_0)\cos\gamma .$$

По определению вектор

$$\mathrm{grad} f(P_0) = \left(f'_x(P_0),\ f'_y(P_0),\ f'_z(P_0)\right)$$

есть градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке P_0. В случае $\vec{l} = \mathrm{grad} f(P_0)$ имеет место формула

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}} = \left|\mathrm{grad} f(P_0)\right| .$$

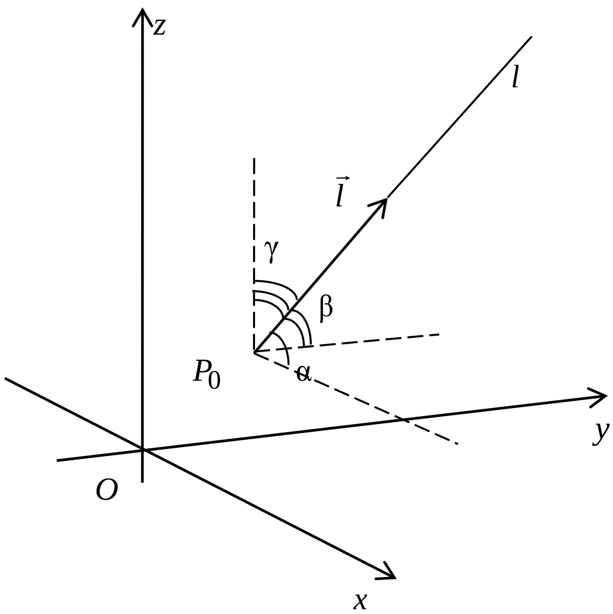


Рисунок 8

Пример. Найти производную функции $u = x^3 y^2 z$ в точке $P_0(1; 2; 3)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, $P_1(2; 3; 4)$, и градиент в точке P_0.

Полагая $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$, вычислим значения частных производных заданной функции в точке P_0.

$$f'_x(P_0)=\left(3x^2y^2z\right)\Big|_{P_0}=36,\ f'_y(P_0)=\left(2x^3yz\right)\Big|_{P_0}=12,\ f'_z(P_0)=\left(x^3y^2\right)\Big|_{P_0}=4\,.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_0P_1}=(1;1;1)$.

$$\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|=\sqrt{3}\,,\ \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Тогда с применением формулы для производной по направлению получаем

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\overrightarrow{P_0P_1}}=36\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}52=52\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Искомым градиентом будет вектор $\operatorname{grad}f(P_0)=(36;12;4)$.

С использование правил дифференцирования, формул для производной сложной функции устанавливаются следующие свойства градиента. Предполагаем, что функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ дифференцируемы в точке $M(x,y)$.

а) $\operatorname{grad}\left(f(M)+g(M)\right)=\operatorname{grad}f(M)+\operatorname{grad}g(M)$;

б) $\operatorname{grad}\left(f(M)g(M)\right)=g(M)\operatorname{grad}f(M)+f(M)\operatorname{grad}g(M)$;

в) $\operatorname{grad}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{g(M)\operatorname{grad}f(M)-f(M)\operatorname{grad}g(M)}{\left(g(M)\right)^2}$, если $g(M)\neq 0$;

г) для сложной функции $F(x,y)=F\left(f(x,y),g(x,y)\right)$ имеет место формула

$$\operatorname{grad}F(P)=F'_u(u,v)\operatorname{grad}f(M)+F'_v(u,v)\operatorname{grad}g(M),$$

где $u=f(x,y), v=g(x,y), P\left(f(M),g(M)\right)$.