Частные производные первого и высшего порядков.
Дифференциал функции нескольких переменных.

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

вычисленный при постоянном y.

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

вычисленный при постоянном x.

Для частных производных справедливы обычные формулы и правила дифференцирования.

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=f'''_{xxy}(x,y) \text{ и т. д.}$$

Смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Полный дифференциал функции $z=f(x,y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ для дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ справедливы приближённые равенства

$$\Delta z \approx dz \quad \text{и} \quad f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+dz,$$

где $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ – приращение функции, а дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$.

Аналогично определяется полный дифференциал функции трёх и более аргументов, например, для функции $u=f(x,y,z)$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от её полного дифференциала, т. е. $d^2 z = d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков: $d^3 z = d(d^2 z)$, …, $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Если x и y – независимые переменные и функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Вообще, имеет место формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Примеры решения задач

1. Найти частные производные функций:

а) $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$; б) $z = e^{x^2 + y^2}$; в) $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$.

Решение.

а) Рассматривая y как постоянную величину, получим: $u'_x = 2x - 3y - 1$. Рассматривая x как постоянную, найдём: $u'_y = -3x - 8y + 2$.

б) $z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2}$;

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

в) $\dfrac{\partial\rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi$; $\quad \dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi} = u^4 \cdot 2\cos\varphi(-\sin\varphi) = -u^4 \sin 2\varphi$.

2. Показать, что функция $z = y\ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

Решение.

Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \cdot \left[\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right] =$$

$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} \equiv \frac{z}{y^2}.$$

Получаем тождество, т. е. функция z удовлетворяет данному уравнению.

3. Найти полный дифференциал функции: а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$; б) $u = x^{y^2 z}$.

Решение.

а) Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

б) Имеем $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz$, где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Следовательно,

$$du = y^2 z \cdot x^{y^2 z-1}dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x\,dy + y^2 \cdot x^{y^2 z} \ln x\,dz.$$

4. Вычислить приближённо $\operatorname{arctg}\frac{1,02}{0,95}$, исходя из значения функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ при $x=1$, $y=1$.

Решение.

Значение функции z при $x=1$, $y=1$ есть $z=\operatorname{arctg}1=\pi/4\approx 0,785$. Найдём приращение функции Δz при $\Delta x=-0,05$, $\Delta y=0,02$:

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=-\frac{y\,\Delta x}{x^2+y^2}+\frac{x\,\Delta y}{x^2+y^2}=\frac{x\,\Delta y-y\,\Delta x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 0,02+1\cdot 0,05}{2}=0,035.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg}\frac{1,02}{0,95}=z+\Delta z\approx 0,785+0,035=0,82$.

5. Для функции $z=y\ln x$ найти все частные производные второго порядка.

Решение.

Найдём частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x$.

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\ln x)=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

6. Найти $d^2 z$ для функции $z=\sin x\sin y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y;$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y \, dx^2 + 2\cos x \cos y \, dx\, dy - \sin x \sin y \, dy^2.$$