Производная сложной и неявно заданной функции нескольких переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $z = f(x,y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, причём функции $f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы. Тогда *производная сложной функции* $z = f[x(t), y(t)]$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

Если $z = f(x,y)$, где $y = y(x)$, то *полная производная* от z по x находится по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

Если же $z = f(x,y)$, где $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, то частные производные выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3)$$

Производная неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y) = 0$, где $F(x,y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y, может быть вычислена по формуле

$$y' = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом y как функцию от x.

Аналогично, частные производные неявной функции двух переменных $z = z(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция переменных x, y и z, могут быть вычислены по формулам $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$ при условии $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ частные производные $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ конечны и не обращаются в нуль одновременно, то *уравнение касательной плоскости* к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0,$$

а *уравнение нормали* к поверхности в этой же точке – в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Если же уравнение поверхности задано явным образом: $z = f(x, y)$ и в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ частные производные $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M$ конечны (и могут быть равны нулю одновременно), то уравнение касательной плоскости в точке M записывается в виде

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_0),$$

а уравнение нормали – в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Равенство нулю, например $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$, означает, что касательная плоскость параллельна оси Ox, а нормаль лежит в плоскости $x = x_0$.

Примеры решения задач

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

а) $z = x^5 + 2xy - y^3$, и $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$;

б) $z = e^{x^2 + y^2}$, где $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

Решение.

а) Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. Тогда по формуле (1) находим:

$$\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

б) В этом примере подстановка x и y в z упрощает функцию z: $z(t)=e^{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}=e^{a^2}$. Очевидно, $\dfrac{dz}{dt}=0$.

2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$ для функции $z=\ln(x^2-y^2)$, где $y=e^x$.

Решение.

Имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$. Используя формулу полной производной (2), находим: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{2ye^x}{x^2-y^2}=\dfrac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}$.

3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^v$, $u=\ln(x-y)$, $v=e^{\frac{x}{y}}$.

Решение.

Используем формулы (3), учитывая, что здесь независимыми являются переменные x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{x-y}+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{y-x}+u^v\ln u\cdot e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

4. Найти производную $y'(x)$ неявной функции, заданной уравнением $\cos(x+y)+y=0$.

Решение.

Здесь $F(x,y)=\cos(x+y)+y$. Имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x+y)\,,\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x+y)+1.$$

Следовательно, $y' = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\dfrac{\sin(x+y)}{-\sin(x+y)+1} = \dfrac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}$.

5. Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ неявной функции, заданной уравнением $y - \sin y = x$.

Решение.

Здесь $F(x,y) = y - \sin y - x$. Имеем: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 - \cos y$, откуда

$$y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{1}{1-\cos y}.$$

Найдём вторую производную: $y'' = -\dfrac{\sin y \cdot y'}{(1-\cos y)^2} = -\dfrac{\sin y}{(1-\cos y)^3}$.

6. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции, заданной уравнением $z^3 - 3xyz = a^3$.

Решение.

Здесь $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$. Находим: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -3yz$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3xz$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{3yz}{3z^2-3xy} = \frac{yz}{z^2-xy};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \frac{3xz}{3z^2-3xy} = \frac{xz}{z^2-xy}.$$

7. Найти дифференциал dz неявной функции, заданной уравнением $xyz = x + y + z$.

Решение.

Здесь $F(x, y, z) = xyz - x - y - z$. Как известно, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, поэтому найдём сначала $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{yz - 1}{xy - 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{xz - 1}{xy - 1}.$$

Следовательно, $dz = \frac{1}{1 - xy}\left[(yz - 1)dx + (xz - 1)dy\right]$.

8. Дана поверхность $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Составить уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности в точке $M(1;1;1)$.

Решение.

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$, и их значения в точке $M(1;1;1)$: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = -1$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2$. Тогда уравнение касательной плоскости будет иметь вид: $z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1)$ или $x - 2y + z = 0$.

Уравнение нормали: $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}$.

9. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 1$.

Решение.

Здесь $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$. Найдём частные производные: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$. Из условия параллельности касательной плоскости и данной плоскости следует, что $\frac{\partial F/\partial x}{1} = \frac{\partial F/\partial y}{1} = \frac{\partial F/\partial z}{1}$, или

$2x = 4y = 6z$. Присоединив к этим уравнениям уравнение поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$, найдём координаты точек касания: $M_1(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ и $M_2(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3})$. Следовательно, уравнения касательных плоскостей имеют вид:

$$1 \cdot (x \pm \sqrt{6}) + 1 \cdot (y \pm \frac{\sqrt{6}}{2}) + 1 \cdot (z \pm \frac{\sqrt{6}}{3}) = 0,$$

т. е. $x + y + z + \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$ и $x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$.