

Экстремум функции двух переменных

Максимум или минимум функции называется её экстремумом. Точка M_0 , в которой функция имеет экстремум, называется *точкой экстремума*.

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (*необходимое условие экстремума*).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными точками*. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума!

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Тогда

- 1) если $\Delta > 0$, то функция в точке M_0 имеет экстремум: максимум, если $A < 0$, минимум, если $A > 0$;
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;
(*достаточные условия наличия или отсутствия экстремума*)
- 3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (*уравнение связи*).

Условие $\varphi(x, y) = 0$ определяет некоторую цилиндрическую поверхность в пространстве, которая пересекается с поверхностью $z = f(x, y)$ по некоторой линии. Фактически необходимо исследовать на экстремум эту линию пересечения.

Укажем здесь два способа отыскания условного экстремума функции двух переменных.

I. Если уравнение связи записать в явном виде и подставить затем в уравнение $z = f(x, y)$, то останется лишь исследовать на экстремум полученную функцию одной независимой переменной.

II. Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой *функции Лагранжа* $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, где λ – множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:

$$\begin{cases} F'_x \equiv f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ F'_y \equiv f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \\ F'_\lambda \equiv \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из этих трёх уравнений можно найти неизвестные $x = x_0$, $y = y_0$ и $\lambda = \lambda_0$.

Достаточные условия экстремума функции Лагранжа:

1) точка $M_0(x_0, y_0)$ будет точкой условного максимума, если

$$d^2F \Big|_{M_0, \lambda_0} < 0 \text{ при } d\varphi \Big|_{M_0} = 0;$$

2) точка $M_0(x_0, y_0)$ будет точкой условного минимума, если

$$d^2F \Big|_{M_0, \lambda_0} > 0 \text{ при } d\varphi \Big|_{M_0} = 0.$$

Здесь $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$, $d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$.

Для того чтобы найти *наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области*, надо:

- 1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

- 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Примеры решения задач

1. Исследовать на экстремум функцию:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

б) $f(x, y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$.

Решение.

а) Находим частные производные 1-го порядка: $z'_x = 2x + y - 3$, $z'_y = x + 2y - 6$. Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \text{ откуда } x = 0, y = 3 \Rightarrow M(0;3).$$

Находим значения частных производных второго порядка в точке M :

$$A = z''_{xx} = 2, B = z''_{xy} = 1, C = z''_{yy} = 2.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, $A > 0$. Следовательно, в точке $M(0;3)$ заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$.

б) Определим стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x = 8xy + 24y = 0, \\ f'_y = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } \begin{cases} y=0 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -2, \\ x=-3 \Rightarrow y=2. \end{cases}$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4;0)$, $M_2(-2;0)$, $M_3(-3;2)$.

Вычислим вторые производные: $f''_{xx} = 8y$, $f''_{xy} = 8x + 24$, $f''_{yy} = 2$.

Теперь для каждой из трёх точек определим $\Delta = AC - B^2$:

$$1) \quad M_1(-4;0): \quad A=0, B=-32+24=-8, C=2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -64 < 0,$$

т. е. точка M_1 не является точкой экстремума;

$$2) \quad M_2(-2;0): \quad A=0, B=-16+24=8, C=2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 < 0, \quad \text{т. е.}$$

точка M_2 не является точкой экстремума;

3) $M_3(-3;2): \quad A=16, B=0, C=2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 32 > 0$. При этом $A > 0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ – точка локального минимума функции $f(x, y)$ с $f_{\min} = f(-3;2) = -10$.

2. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение.

Из уравнения связи находим: $y = \frac{5-2x}{3}$. Тогда $z = \frac{1}{3}(5x - 2x^2)$.

Исследуем на экстремум эту функцию одной переменной: $z' = 0 \Leftrightarrow 5 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5/4$ – критическая точка. Это точка максимума, т.к. в ней $z'' = -4 < 0$. При $x = 5/4$ $y = 5/6$, $z = 25/24$, следовательно, в точке $(5/4; 5/6)$ функция $z = xy$ достигает наибольшего значения $z_{\max} = 25/24$.

3. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение.

Пусть x и y – катеты треугольника, а z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения

функции $\tilde{z} = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $xy/2 = S$, т.е. $xy - 2S = 0$.

Из уравнения связи: $y = 2S/x$. Тогда $\tilde{z} = x^2 + \frac{4S^2}{x^2}$. Исследуем эту

функцию на экстремум: $\tilde{z}' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4 - 8S^2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2S}$ – критическая

точка. Это точка минимума, т.к. в ней $\tilde{z}'' = 8 > 0$.

При $x = \sqrt{2S}$ $y = \sqrt{2S}$, $z = 2\sqrt{S}$. Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в круге $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$.

Решение.

Здесь рассматривается область D , ограниченная окружностью $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$, включая и точки окружности.

Найдём стационарные точки данной функции. Так как $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, то в силу необходимых условий экстремума получаем: $x = 0$, $y = 0$.

Нетрудно видеть, что в точке $(0;0)$ функция $z = x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение $z_{\text{наим}} = 0$, причём указанная точка является внутренней точкой области D .

Исследуем на условный экстремум функцию $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны соотношением $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

Рассмотрим функцию $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda((x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9)$.

Для определения x , y и λ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \lambda(x - \sqrt{2}) = 0, \\ y + \lambda(y - \sqrt{2}) = 0, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x = y = 5\sqrt{2}/2, \lambda = -5/3$ (при этом $z = 25$) и $x = y = -\sqrt{2}/2, \lambda = -1/3$ (при этом $z = 1$). Значит, наибольшее значение функция принимает в точке $(5\sqrt{2}/2; 5\sqrt{2}/2)$. Итак, $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 25$.