Лекция №4

Закон Ома в дифференциальной и интегральной форме.

Если в стационарном поле тока выделить трубку тока (рис. 7), то, с одной стороны, напряжение на трубке будет равно

du=Edl,

а с другой — по закону Ома:

$$du = di\frac{dl}{\gamma dS} = \frac{\delta dS dl}{\gamma dS} = \frac{\delta dl}{\gamma},$$

где $\gamma\left(\frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}\right)$ – удельная проводимость среды.

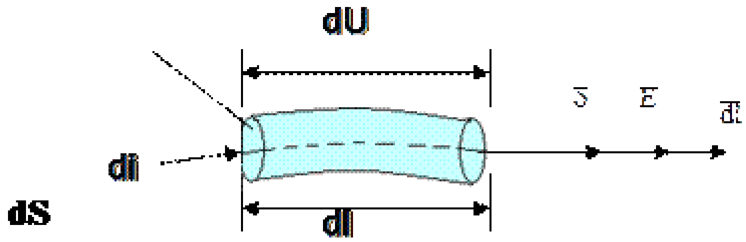

Рис.7

.

Отсюда следует, что

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E}.$$

Это выражение называют законом Ома в дифференциальной форме.

Как было сказано выше, в общем случае

$$\bar{E} = \bar{E}_{q} + \bar{E}_{CT}$$

и, исходя из этого, может быть получен обобщенный закон Ома в дифференциальной форме:

$$\frac{\bar{\delta}}{\gamma} = \bar{E}_{q} + \bar{E}_{ст}.$$

Интегрирование уравнения

$$\frac{\bar{\delta}}{\gamma} = \bar{E}_{q} + \bar{E}_{ст}$$

по пути l (рис.8) приводит к следующему выражению:

$$\int\limits_{1(l)}^{2} \frac{\bar{\delta}}{\gamma} d\bar{l} = \int\limits_{1(l)}^{2} \bar{E}q d\bar{l} + \int\limits_{1(l)}^{2} \bar{E}_{ст} d\bar{l}.$$

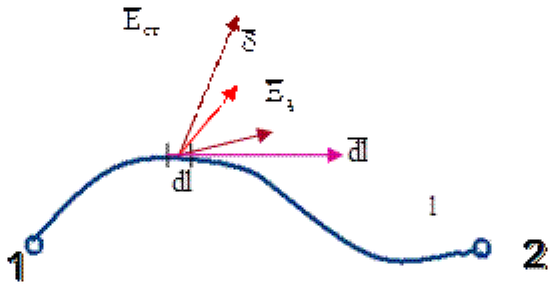

Рис.8

Первый интеграл справа — напряжение между точками 1 и 2, обусловленное кулоновскими полями и не зависящее от формы пути l. Второй интеграл — ЭДС участка 1—2 по пути l. Следовательно, обобщенный закон Ома в интегральной форме принимает вид:

$$\int \frac{\bar{\delta}}{\gamma} d\bar{l} = U_{12} - e_{12}.$$

Если в проводящей среде выделить некоторый объём, по которому протекает постоянный ток, то можно сказать, что ток, который войдёт в объём, должен равняться току, вышедшему из объёма, иначе в этом объёме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объём и выходящего из объёма токов записывают так:

$$\oint \bar{\delta}\,\overline{dS} = 0.$$

Если разделить левую и правую части этого уравнения на одно и то же число, то равенство останется справедливым:

$$\frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = 0$$

Очевидно, что последнее соотношение будет справедливо и в том случае, если объём, находящийся внутри замкнутой поверхности, устремим к нулю:

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = \operatorname{div} \vec{\delta} = 0$$

Для постоянного поля в проводящей среде

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = 0.$$

Это соотношение называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Оно означает, что в установившемся режиме (при постоянном токе) в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости $\bar{\delta}$.

Второй закон Кирхгофа для квазилинейного проводника.

Интегрирование выражения

$$\frac{\bar{\delta}}{\gamma} = \bar{E}_q + \bar{E}_{CT}$$

по замкнутому контуру с учетом того, что

$$\oint \bar{E}_q d\bar{l} = 0,$$

приводит к выражению, известному как второй закон Кирхгофа:

$$\oint \frac{\bar{\delta}}{\gamma} d\bar{l} = \oint \bar{E}_{CT} d\bar{l} = e_{з.к.}.$$

Если замкнутый контур состоит из n квазилинейных проводников, характеризующихся параметрами i_k, R_k, e_k, то с учетом изложенного выше

$$\sum e_k = \sum I_k r_k = \sum U_k,$$

как это и принимается в теории цепей постоянного тока.

Алгебраическая сумма ЭДС замкнутого контура равна алгебраической сумме напряжений на сопротивлениях этого контура. Как и ранее, следует иметь в виду, что если направления ЭДС (e_k) и тока (I_k) совпадают с направлением обхода контура, то соответствующие слагаемые в уравнении Кирхгофа положительны, а если не совпадают — отрицательны.

Интегро-дифференциальный закон Кирхгофа на примере RLC-цепи с ключом.

чается, если в момент включения цепи принужденное напряжение равно амплитудному значению ($\psi - \varphi = \pi$ или 0), а постоянная времени цепи $\tau \to \infty$. Кривая u_C для $\psi - \varphi = \pi$ аналогична кривой тока на рис. 13-9, *б*. Примерно через половину периода после включения цепи напряжение на емкости достигает почти удвоенной амплитуды принужденного режима $u_{C\,макс} \approx 2U_{Cm\,пр}$.

Итак, в этом случае переходное напряжение на емкости ни при каких условиях не может превышать удвоенной амплитуды принужденного режима.

Если в момент включения принужденное напряжение на емкости проходит через нуль, то начальное значение его свободной составляющей также равно нулю, т. е. свободного напряжения на емкости вообще нет и в цепи сразу возникает принужденный режим.

Совершенно так же, как и для цепи на рис 13-10, *а*, но заменяя индуктивность емкостью, можно показать, что в разветвленной цепи из активных сопротивлений с одной емкостью постоянная времени

$$\tau = (r + r_{вх})\,C. \qquad (13\text{-}28)$$

Можно дать простую формулу для непосредственного определения переходного напряжения на емкости для цепи с активными сопротивлениями и одним конденсатором.

Напряжение на емкости

$$u_C(t) = u_{C\,пр}(t) + u_{C\,св}(t) = u_{C\,пр} + Ae^{-t/\tau},$$

где τ определяется согласно (13-28). При $t = 0$

$$u_C(0) = u_{C\,пр-}(0) = u_{C\,пр}(0) + A,$$

откуда

$$A = u_{C\,пр-}(0) - u_{C\,пр}(0)$$

и окончательно

$$u_C(t) = u_{C\,пр}(t) + [u_{C\,пр-}(0) - u_{C\,пр}(0)]\,e^{-t/\tau}. \qquad (13\text{-}29)$$

Если до коммутации ($t < 0$) режим не был принужденным, то напряжение $u_{C\,пр-}(0)$ нужно заменить напряжением $u_{C-}(0)$ предшествующего режима. Тогда получим:

$$u_C(t) = u_{C\,пр}(t) + [u_{C-}(0) - u_{C\,пр}(0)]\,e^{-t/\tau}. \qquad (13\text{-}30)$$

Подчеркнем, что приведенные формулы (13-29) и (13-30) *действительны только для напряжения на емкости.*

13-9. Переходные процессы в неразветвленной цепи r, L, C

По второму закону Кирхгофа свободные напряжения на всех элементах неразветвленной цепи взаимно уравновешиваются. Поэтому для цепи (рис. 13-17), состоящей из последовательно соединенных сопротивления, индуктивности и емкости (цепи r, L, C или последовательного контура), имеем:

$$ri_{св} + L\frac{di_{св}}{dt} + u_{C\,св} = 0, \qquad (13\text{-}31)$$

где

$$i_{св} = dq_{св}/dt = C\,du_{C\,св}/dt. \tag{13-32}$$

Подставляя значение $i_{св}$ в уравнение (13-31), после дифференцирования получим для $u_{C\,св}$ дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2u_{C\,св}}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du_{C\,св}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{C\,св} = 0. \tag{13-33}$$

Свободный заряд на конденсаторе удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2q_{св}}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq_{св}}{dt} + \frac{1}{LC}q_{св} = 0.$$

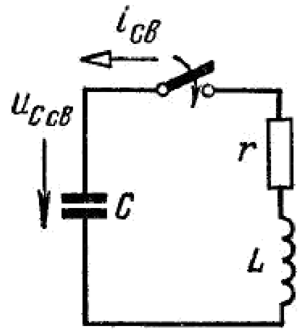

Рис. 13-17.

Дифференцируя это уравнение по времени, с учетом равенства (13-32) получим аналогичное дифференциальное уравнение для $i_{св}$:

$$\frac{d^2i_{св}}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{LC}i_{св} = 0.$$

Тождественность дифференциальных уравнений указывает на одинаковый закон изменения $u_{C\,св}$, $q_{св}$ и $i_{св}$.

Для решения любого из этих дифференциальных уравнений составим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \tag{13-34}$$

Характер свободного процесса зависит только от параметров цепи r, L, C, т. е., иначе говоря, от вида корней характеристического уравнения. Так как эти корни определяются равенством

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \tag{13-35}$$

то характер свободного процесса зависит от знака подкоренного выражения, который и определяет, будут ли корни вещественными или комплексными.

13-10. Апериодический разряд конденсатора

Апериодическим разрядом конденсатора, заряженного до напряжения U_0, через резистор и катушку индуктивности называется разряд, при котором напряжение на конденсаторе монотонно спадает от значения U_0 до нуля, т. е. не происходит перезарядки конденсатора. С энергетической точки зрения это означает, что при разряде конденсатора отдаваемая им энергия лишь в малой доле переходит в энергию магнитного поля катушки, а большая ее часть поглощается в резисторе. Начиная с некоторого момента времени, в тепло переходит не только оставшаяся энергия электри-