

Лекция №5

RLC-контур

Кроме как в механических системах, к примеру, в таких, маятник или же грузило на пружине, свободные колебания могут возникать также и в электрических цепях, самым простым примером чего может послужить последовательный RLC-контур, изображенный на рис. 2.2.1.2.2.1.

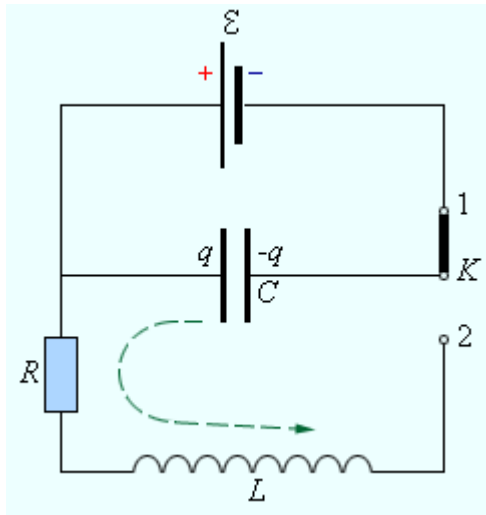


Рисунок 2.2.1.2.2.1. Последовательный RLC-контур.

Находясь в положении 1, ключ K позволяет источнику зарядить конденсатор до некоего напряжения U . Процесс разрядки ранее заряженного конденсатора провоцируется переключением ключа K во второе положение и происходит через катушку индуктивности L и резистор R . При выполнении определенных условий данный процесс может приобретать характер колебательного.

Для не содержащей внешнего источника тока замкнутой RLC-цепи закон Ома представляет из себя выражение:

$$IR + U = -L \frac{dJ}{dt}, \quad IR + U = -L \frac{dJ}{dt}.$$

В данной формуле $U = \frac{q}{C}$ $U = \frac{q}{C}$ – напряжение на конденсаторе, q является обозначением заряда конденсатора, а $J = \frac{dq}{dt}$ $J = \frac{dq}{dt}$ – ток в цепи. Правой частью соотношения является выражение ЭДС самоиндукции катушки. В случае, когда заряд конденсатора $q(t)$ берется как переменная величина, описывающее свободные колебания в RLC-контуре уравнение может быть приведено к виду:

$$\ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Для начала рассмотрим такую ситуацию, в которой электромагнитные потери энергии в контуре равны нулю. В таком случае:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Примем обозначение $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Данным чуть выше уравнением описывается процесс незатухающих свободных колебаний в LC-контуре. Внешне оно полностью эквивалентно уравнению свободных колебаний груза на пружине в условиях отсутствующих сил трения. Аналогичный свободным механическим и электрическим колебаниям процесс изображен на рисунке 2.2.2.2.2. На данной иллюстрации приводятся графики зависимости заряда $q(t)$ и смещения $x(t)$ груза и $q(t)$ конденсатора от положения равновесия, а также графики изменений тока $J(t)$ и скорости груза $v(t)$ за период $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ колебаний.

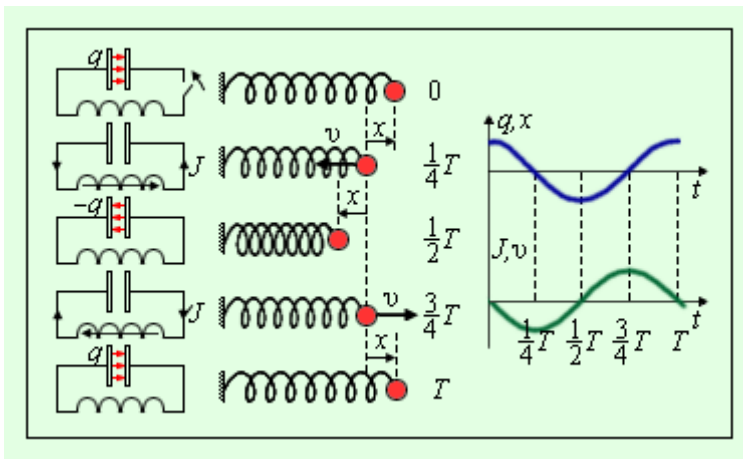


Рисунок 2.2.2.2.2. Аналогия процессов свободных электрических и механических колебаний.

Сделать заключение о некоей связи между механическими и электрическими величинами нам позволяет сопоставление процессов в электрическом колебательном контуре и свободных колебаний груза на пружине. Данные аналогии показаны в таблице.

Электрические величины		Механические величины	
Заряд конденсатора	$q(t)$	Координата	$x(t)$
Ток в цепи	$J = \frac{dq}{dt}$	Скорость	$v = \frac{dx}{dt}$
Индуктивность	L	Масса	m
Величина, обратная емкости	$\frac{1}{C}$	Жесткость	k
Напряжение на конденсаторе	$U = \frac{q}{C}$	Упругая сила	kx
Энергия электрического поля конденсатора	$\frac{q^2}{2C}$	Потенциальная энергия пружины	$\frac{kx^2}{2}$
Магнитная энергия катушки	$\frac{LI^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$
Магнитный поток	LI	Импульс	mv

Свободные колебания

Определение 1

Свободные колебания в электрическом контуре носят название гармонических при условии отсутствия затухания.

Такие колебания происходят по закону:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Параметры L и C колебательного контура определяют лишь собственную частоту свободных колебаний:
 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Определение 2

«Начальными условиями», определяющими амплитуду q_0 и начальную фазу φ_0 , называют тот способ, при помощи которого систему вывели из равновесия.

Пример 1

Например, для процесса колебаний, который начнется в контуре, изображенном на рисунке 2.2.12.1, после перевода ключа КК в второе положение, $q_0 = C\delta$, $\varphi_0 = 0$. Процесс свободных колебаний провоцирует повторяющееся превращение запасенной в конденсаторе электрической энергии $W_{\text{Э}}$ в магнитную энергию катушки $W_{\text{М}}$ и наоборот. В ситуации, когда потери энергии равны нулю, полная электромагнитная энергия системы не претерпевает изменений:

$$W = W_{\text{Э}} + W_{\text{М}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Lj^2}{2} = \text{const} \quad W = W_{\text{Э}} + W_{\text{М}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Lj^2}{2} = \text{const}$$

Однако любой реально существующий контур, в отличие от идеального, включает в себя некоторое сопротивление R . По этой причине, процесс свободных колебаний в подобном контуре не подчиняется гармоническому закону. Запасенная в контуре энергия с каждым периодом колебаний теряется, превращаясь в джоулево тепло, из-за чего колебания становятся затухающими (рис. 2.2.32.2.3).

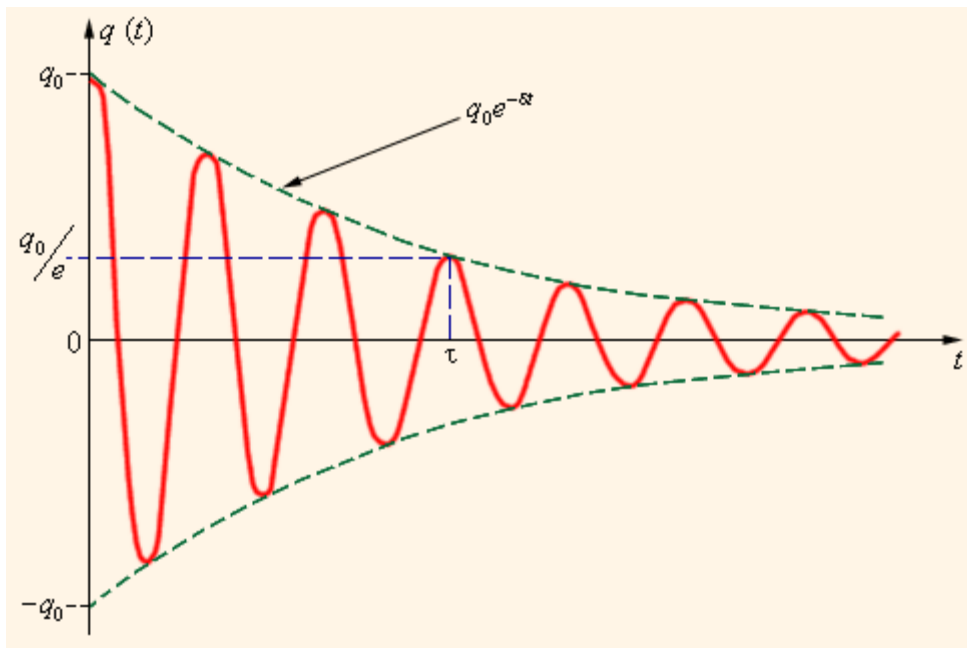


Рисунок 2.2.3.2.2.3. Затухающие колебания в контуре.

Затухающие колебания в электрическом контуре сравнимы с затухающими колебаниями груза на пружине в условиях существующего вязкого трения, при котором сила трения меняет свое значение прямо пропорционально скорости тела: $F_{\text{тр}} = -\beta v$, $F_{\text{тр}} = -\beta v$.

В данной формуле сопротивление R электрического контура аналогично коэффициенту β . Уравнение свободных колебаний в контуре при наличии затухания принимает следующий вид:

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Определение 3

Коэффициентом затухания называется физическая величина $\delta = R/2L$.

Следующая функция представляет собой решение приведенного выше дифференциального уравнения:

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Также она содержит описывающий затухание колебаний множитель $\exp(-\delta t)$. Скорость затухания зависит от электрического сопротивления R контура.

Определение 4

Интервал времени $\tau = 1/\delta = 1/\alpha$, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2,7$ раза, называется временем затухания.

Понятие добротности Q колебательной системы:

$$Q = \pi N = \pi \tau T = \pi N = \pi T / \tau,$$

где N является числом полных колебаний, которые совершает система за время затухания τ .

Определение 5

Любая добротность Q , относящаяся к колебательной системе, которая способна совершать свободные колебания, имеет следующее энергетическое определение:

$$Q = \frac{2\pi \text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потеря энергии за 1 период}} = \frac{2\pi \text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потеря энергии за 1 период}}$$

Добротность Q , принадлежащая RLC-контуре, выражают формулой:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Добротность электрических контуров, которые применяются в радиотехнике, обычно порядка нескольких десятков и даже сотен.

Стоит обратить внимание на то, что собственная частота ω свободных колебаний в контуре с не самой высокой добротностью несколько уступает собственной частоте ω_0 идеального контура с такими же значениями L и C . Однако при $Q \geq (5 \div 10)$ данным различием можно пренебречь.

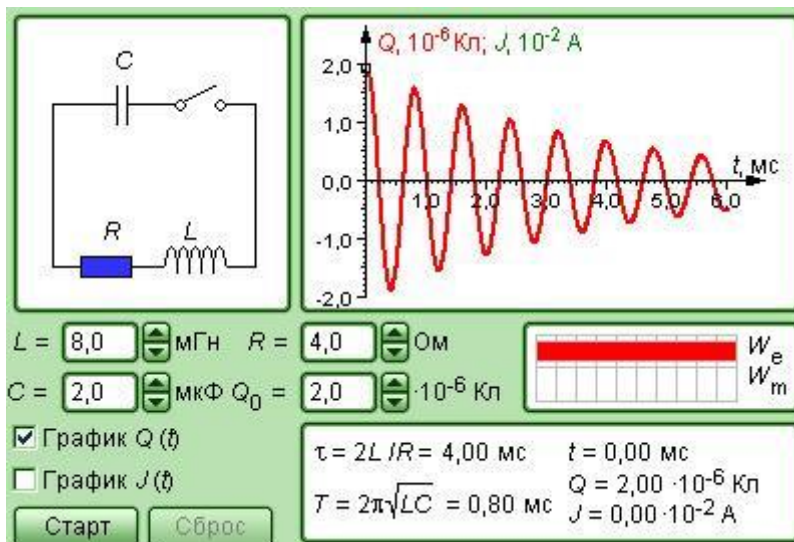


Рисунок 2.2.4.2.2.4. Модель свободных колебаний в RLC-контуре.

Законы коммутации и начальные условия

Приемником служит трехфазная система конденсаторов, соединенных в звезду. Для первой гармоники

$$Z_{\text{пл}} = 1/j\omega C = -j10 \text{ Ом.}$$

Решение Найдем показания приборов (индексы токов и напряжений соответствуют обозначениям приборов в схеме)

Для случая звезды без нейтрального провода (рубильник P разомкнут)

$$I_1 = I_\phi = I_n = \sqrt{(E_1/z_1)^2 + (E_5/z_5)^2} = \sqrt{24,4^2 + 10^2} = 26,2 \text{ А;}$$

$$U_3 = \sqrt{(24,4 \cdot 10)^2 + (10 \cdot 2)^2} \approx 244 \text{ В; } U_4 = 50 \text{ В;}$$

$$U_1 = \sqrt{U_3^2 + U_4^2} = 250 \text{ В; } U_2 = U_5 = \sqrt{3}U_3 = 423 \text{ В.}$$

Для случая звезды с нейтральным проводом (рубильник P замкнут)

$$I_1 = I_\phi = I_n = \sqrt{(E_1/z_1)^2 + (E_3/z_3)^2 + (E_5/z_5)^2} = \sqrt{24,4^2 + 150^2 + 10^2} = 152 \text{ А;}$$

$$U_3 = U_1 = \sqrt{(24,4 \cdot 10)^2 + (150 \cdot 3,33)^2 + (10 \cdot 2)^2} = 556 \text{ В;}$$

$$U_2 = U_5 = 423 \text{ В; } I_2 = 3(50/0,33) = 450 \text{ А.}$$

Близость к резонансу на третьей гармонике привела к очень большому значению тока третьей гармоники в нейтрали. В этом случае оказалось, что линейное напряжение, которое не содержит третьей гармоники, меньше фазного, так как вследствие резонанса напряжений третья гармоника фазного напряжения больше основной.

Пример 12-13. Найти показания приборов при тех же фазных э. д. с. и сопротивлениях, что и в примере 12-12, но при соединении источника и приемника треугольником (рис 12-22, б)

Решение. В этом случае третья гармоника замыкается в контуре генератора и

$$I_{1,3} = 50/3 = 16,7 \text{ А}$$

Так как остальные составляющие те же, что и в примере 12-12, то

$$I_1 = \sqrt{I_{1,1}^2 + I_{1,3}^2 + I_{1,5}^2} = \sqrt{24,4^2 + 16,7^2 + 10^2} = 31 \text{ А;}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{1,1}^2 + I_{1,5}^2} = \sqrt{24,4^2 + 10^2} = 26,6 \text{ А;}$$

$$I_2 = I_3 \sqrt{3} = 45,5 \text{ А; } U_n = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = 244 \text{ В.}$$

Таким образом, третья гармоника влияет только на внутренние токи источника и не сказывается на распределении токов и напряжений приемника.

Глава тринадцатая

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

13-1. Возникновение переходных процессов и законы коммутации

В электрических цепях могут происходить включения и отключения пассивных или активных ветвей, короткие замыкания отдельных участков, различного рода переключения, внезапные изменения параметров и т. д. В результате таких изменений, называемых часто коммутационными или просто коммутациями, которые будем считать происходящими мгновенно, в цепи возникают

переходные процессы, заканчивающиеся спустя некоторое (теоретически бесконечно большое) время после коммутации.

Сформулируем два закона коммутации:

1. В любой ветви с индуктивностью ток и магнитный поток в момент коммутации сохраняют те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и дальше начинают изменяться именно с этих значений. Так, при включении ветви с катушкой, в которой не было тока, ток в этой ветви в момент коммутации равен нулю. Если для такой ветви допустить, что в момент коммутации ток изменяется скачком, то напряжение на индуктивности $(L di/dt) = u_L$ будет равно бесконечности и в цепи не будет соблюдаться второй закон Кирхгофа.

В случае двух и большего числа цепей, связанных взаимной индуктивностью, но при отсутствии в каждой из них магнитных потоков рассеяния формулировка первого закона коммутации изменяется в том смысле, что в момент коммутации общий магнитный поток этих цепей не может, а токи в каждой из них в отдельности могут изменяться скачком.

2. В любой ветви напряжение и заряд на емкости сохраняют в момент коммутации те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяются, начиная именно с этих значений.

Так, при включении ветви с конденсатором, который не был заряжен, напряжение на конденсаторе в момент коммутации равно нулю. Если для ветви с емкостью допустить, что в момент коммутации напряжение на емкости изменяется скачком, то ток $i = (C du_C/dt)$ будет равен бесконечности и в цепи, всегда имеющей сопротивление, опять-таки не будет соблюдаться второй закон Кирхгофа.

С энергетической точки зрения невозможность мгновенного изменения тока в индуктивности и напряжения на емкости объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в них энергии (энергии магнитного поля катушки, равной $Li^2/2$, и энергии электрического поля конденсатора, равной $Cu^2/2$). Действительно, скачкообразное изменение энергии требует бесконечно больших мощностей в индуктивностях и емкостях, что лишено физического смысла, так как реальные источники питания не обладают бесконечно большой мощностью.

В этой главе рассмотрены переходные процессы в линейных электрических цепях. Поэтому исключается из рассмотрения нелинейный элемент — электрическая дуга, которая возникает при включении или отключении. Чтобы исключить влияние дуги при коммутациях, предположим, что длительность коммутации по сравнению с продолжительностью переходного процесса очень мала. В этом случае при расчетах можно считать, что переключатель, осуществляющий коммутацию, включается или отключается мгновенно. Если нет специального указания, будем считать момент коммутации за начало отсчета времени и принимать, что в момент $t = 0$

или точнее $t = 0 +$ коммутация уже произошла. Отключение отдельных ветвей будем рассматривать, если в отключаемой ветви нет индуктивности и если ее отключение не приводит к необходимости скачкообразного изменения тока в других ветвях с индуктивностями.

13-2. Переходный, принужденный и свободный процессы

Рассмотрим сначала некоторые общие вопросы расчета переходных процессов на примере включения неразветвленной цепи с сопротивлением, индуктивностью и емкостью (последовательного контура) к источнику э. д. с. e , которая изменяется во времени непрерывно и задана каким-нибудь аналитическим выражением.

Запишем второй закон Кирхгофа для любого момента времени:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e, \quad (13-1)$$

где i — ток переходного процесса, который в дальнейшем будем называть переходным током или просто током i .

Когда с переходным процессом можно уже не считаться, наступает принужденный режим. Принужденный режим, создаваемый источником произвольной периодически изменяющейся э. д. с. (или тока), называют еще установившимся режимом. После окончания переходного процесса источник э. д. с., изменяющейся, например, по экспоненциальному закону, создает принужденный режим, а источник постоянной э. д. с. или э. д. с., изменяющейся по гармоническому закону, создает принужденный или установившийся режим.

Когда наступит принужденный режим, уравнение (13-1) примет вид:

$$ri_{np} + L \frac{di_{np}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{np} dt = e, \quad (13-2)$$

где i_{np} — ток принужденного режима или просто принужденный ток.

Вычитая почленно уравнение (13-2) из уравнения (13-1) и обозначая

$$i - i_{np} = i_{св}, \quad (13-3)$$

получаем:

$$ri_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{св} dt = 0, \quad (13-4)$$

или

$$u_{r_{св}} + u_{L_{св}} + u_{C_{св}} = 0. \quad (13-4a)$$