Практическое занятие №5-6

Преобразование Фурье. Изучение быстрого преобразования Фурье, реализованного в пакете Excel.

1. **Дать определение преобразования Фурье.**

Преобразование Фурье ($\mathcal{F}$) — операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной другую функцию, также вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные составляющие — гармонические колебания с разными частотами.

Преобразование Фурье функции f вещественной переменной является интегральным и задаётся следующей формулой:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega}\, dx.$$

Разные источники могут давать определения, отличающиеся от приведённого выше выбором коэффициента перед интегралом, а также знака «−» в показателе экспоненты. Но все свойства будут те же, хотя вид некоторых формул может измениться.

Разновидности преобразования Фурье

Непрерывное преобразование Фурье

Наиболее часто термин «преобразование Фурье» используют для обозначения непрерывного преобразования Фурье, представляющего любую квадратично-интегрируемую функцию $f(t)$ как сумму (интеграл Фурье) комплексных показательных функций с угловыми частотами ω и комплексными амплитудами $F(\omega) = \mathcal{F}(f)(t)$. Преобразование имеет несколько форм, отличающихся постоянными коэффициентами.

$$F_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-2\pi i\nu\tau}\, d\tau,$$

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

$$F_3(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau = F_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

где $\omega = 2\pi\nu$.

В разных областях науки и техники могут преобладать различные формы (поэтому иногда надо уточнять определение).

Ряды Фурье

Непрерывное преобразование само фактически является обобщением более ранней идеи рядов Фурье, которые определены для периодических функций или функций, существующих на ограниченной области $f(x)$ (с периодом 2π), и представляют эти функции как ряды синусоид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{inx},$$

где F_n — комплексная амплитуда. Или, для вещественно-значных функций, ряд Фурье часто записывается как:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

где a_n и b_n — (действительные) амплитуды ряда Фурье.

Дискретное преобразование Фурье

Для использования в **компьютерах**, как для научных расчетов, так и для цифровой обработки сигналов, необходимо иметь функции x_k, которые определены на *дискретном* множестве точек вместо непрерывной области, снова периодическом или ограниченном. В этом случае используется дискретное преобразование Фурье (DFT), которое представляет x_k как сумму синусоид:

$$x_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{2\pi ijk/n} \qquad k = 0,\ \dots,\ n-1,$$

где f_j — амплитуды Фурье. Хотя непосредственное применение этой формулы требует $\mathrm{O}(n^2)$ операций, этот расчет может быть сделан за $\mathrm{O}(n \log n)$ операций используя алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ, FFT) (см. О-большое), что делает преобразование Фурье практически важной операцией на **компьютере**.

Оконное преобразование Фурье

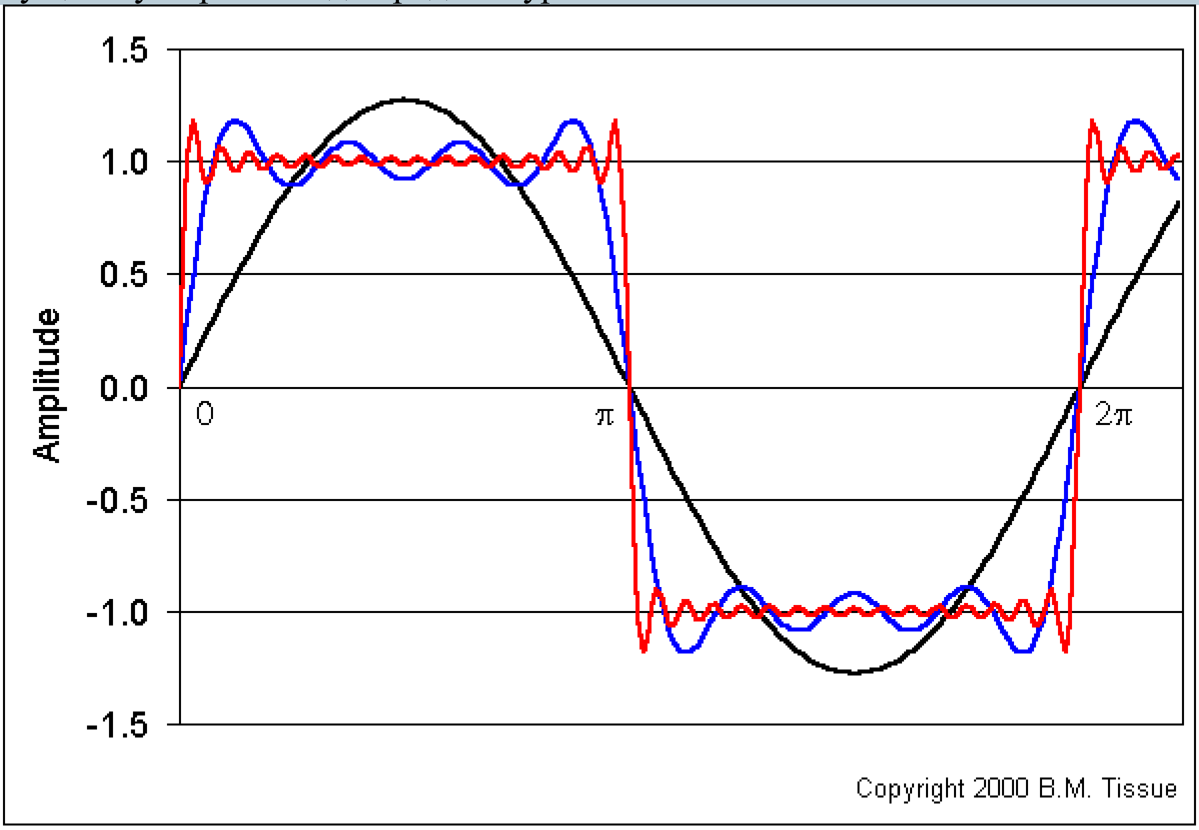
Классическое преобразование Фурье имеет дело со спектром сигнала, взятым во всем диапазоне существования переменной. Нередко интерес представляет только локальное распределение частот, в то время как требуется сохранить изначальную переменную (обычно время). В этом случае используется обобщение преобразования Фурье, так называемое оконное преобразование Фурье. Для начала необходимо выбрать некоторую оконную функцию:

$$F(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)W(\tau - t)e^{-i\omega\tau}\, d\tau,$$

где $F(t,\, \omega)$ даёт (вообще говоря несколько искажённое) распределение частот части оригинального сигнала $f(t)$ в окрестности времени t.

Другие варианты

Дискретное преобразование Фурье является частным случаем (и иногда применяется для аппроксимации) дискретного во времени преобразования Фурье (DTFT), в котором x_k определены на дискретных, но бесконечных областях, и таким образом спектр является непрерывным и периодическим. Дискретное во времени преобразование Фурье является по существу обратным для рядов Фурье.



2. **От всех ли функций можно взять интеграл?**

Фраза "Интеграл не берётся в элементарных функциях" означает, что есть соответствующая теорема Луивилля, которая доказывает, что именно этот интеграл не берётся в элементарных функциях. Так что либо интеграл можно взять, либо можно доказать, что его невозможно взять.

Элементарные функции — функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композицийиз следующих основных элементарных функций:

- алгебраические:
    - степенная;
    - рациональная.

- трансцендентные:
  - показательная и логарифмическая;
  - тригонометрические и обратные тригонометрические.

Каждую элементарную функцию можно задать формулой, то есть набором конечного числа символов, соответствующих используемым операциям. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

Иногда к основным элементарным функциям относят также гиперболические и обратные гиперболические функции, хотя они могут быть выражены через перечисленные выше основные элементарные функции.

Элементарные функции по Лиувиллю

Рассматривая функции комплексного переменного, Лиувилль определил элементарные функции несколько шире. Элементарная функция y переменной x — аналитическая функция, которая может быть представлена как алгебраическая функция $y = \phi(x, z_1, \ldots z_r)$ от x и функций $z_1(x), \ldots z_r(x)$, причём z_1 является логарифмом или экспонентой от некоторой алгебраической функции g_1 от x, z_2 является логарифмом или экспонентой от некоторой алгебраической функции g_2 от x и $z_1(x)$ и так далее.

Например, $y = \sin(x)$ — элементарная функция в этом смысле, поскольку она является алгебраической функцией от показательной функции e^{ix}. Функция $y = e^{e^x}$ тоже является элементарной, поскольку её можно представить в виде:

$y = z_2$, где $z_2 = e^{z_1}, \quad z_1 = e^x$.

Не ограничивая общности рассмотрения, можно считать функции $z_1, \ldots, z_r$ алгебраически независимы, то есть если алгебраическое уравнение $\psi(x, z_1(x), \ldots, z_r(x)) = 0$ выполняется для всех x, то все коэффициенты полинома $\psi(X, Z_1, \ldots Z_r)$ равны нулю.

Интегрирование элементарных функций

Теорема Лиувилля. Если интеграл от элементарной функции $y = \phi(x, z_1, \ldots z_r)$ сам является элементарной функцией, то он представим в виде

$$\int \phi(x, z_1(x), \ldots, z_r(x))\, dx = \sum_i A_i \ln(\psi_i(x, z_1, \ldots z_r)) + \psi_0(x, z_1, \ldots, z_r) + C$$

где A_i — некоторые комплексные числа, а ψ_i — алгебраические функции своих аргументов.

Доказательство этой теоремы Лиувилль основал на следующем принципе. Если интеграл от y берётся в элементарных функциях, то верно

$$\int \phi(x, z_1(x), \ldots z_r(x))\, dx = \psi(x, z_1(x), \ldots z_s(x)) + \mathrm{const}$$

где ψ — алгебраическая функция, z_{r+1} — логарифм или экспонента алгебраической функции $x, z_1, \ldots z_r$ и т. д. Функции $z_1, \ldots z_s$являются алгебраически независимыми и удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений вида

$$z_1' = \rho_1(x, z_1, \ldots, z_s), \ldots$$

где ρ_i — алгебраические функции своих аргументов. Если $z_1 = z_1(x, C), \ldots$ — семейство решений этой системы, то

$$\int \phi(x, z_1(x, C), \ldots)\, dx = \psi(x, z_1(x, C), \ldots z_s(x, C)) + \mathrm{const}$$

откуда

$$\psi(x, z_1(x), \ldots) = \psi(x, z_1(x, C), \ldots z_s(x, C)) + f(C)$$

Для некоторых классов интегралов эта теорема позволяет весьма просто исследовать разрешимость в элементарных функциях задачи об интегрировании.

3. **Вычислить численно в Exselk по заданной формуле, если исходная функция $\sin w_0 t$. Где f=50 Гц.**

$$\omega_{и} = 2\pi f_{и},\ f_{и} = 50\,Гц,\ f(t) = \omega_{п} t, \omega_{п} = 2\pi f_{п},\ f_{п} = 0 \div 100\,Гц\,(с\,шагом\,25\,Гц$$

$$K = \frac{\int_0^{T_п} f(t)\sin(\omega_{п} t)dt}{\int_0^{T_и} |f(t)|dt \cdot \int_0^{T_и} |\sin(\omega_{и} t)|dt}$$

$f_п$, Гц	0	25	50	75	100
K	0	-50,025	-25,013	-16,465	-12,506