

Глава 1. РАСЧЕТЫ РАБОЧИХ РЕЖИМОВ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Специфика расчетов режимов сложных электрических сетей

Задача расчета режима сложной электрической сети требует определения токов и напряжений в ветвях и узлах многоконтурной схемы замещения. Зачастую задача дополнительно усложняется учетом различия в коэффициентах трансформации трансформаторов, включенных в эти контуры. Необходимые расчеты оказываются крайне трудоемкими. Количество расчетных операций резко возрастает с увеличением числа замкнутых контуров в схеме замещения сети. Большая сложность электрических сетей современных электрических систем, схемы замещения которых содержат десятки и сотни узлов и замкнутых контуров, ставит практически непреодолимые препятствия выполнению расчетов «вручную». Эти трудности определили широкое использование ЭВМ.

Применение ЭВМ требует использования таких методов формулировки задачи и ее решения, которые могут быть достаточно просто переведены на «язык машин». Эта задача с успехом решается при применении методов матричной алгебры и теории графов. Поэтому все современные аналитические методы расчета режимов сложных электрических сетей используют символику и правила этих математических дисциплин.

При расчетах токораспределения в электрических сетях в качестве известных величин рассматриваются токи нагрузок, вычисляемые по известным мощностям нагрузок потребителей. Эти токи, наряду с известными параметрами линий, образующих рассматриваемую сеть, определяют режим сети. Можно поэтому считать, что получаемое в результате расчета токораспределение является результатом действия в расчетной схеме некоторых источников тока, включенных в точки присоединения нагрузок. Такие источники иногда называются *источниками задающих токов*. На рис. 1.1, а) показан узел схемы сети, с которым соединена нагрузка, потребляющая ток I . При представлении нагрузки источником задающего тока (рис. 1.1, б) ток этого источника удобно ориентировать в направлении от источника к узлу, причем, очевидно $I_i = -I_{iy}$

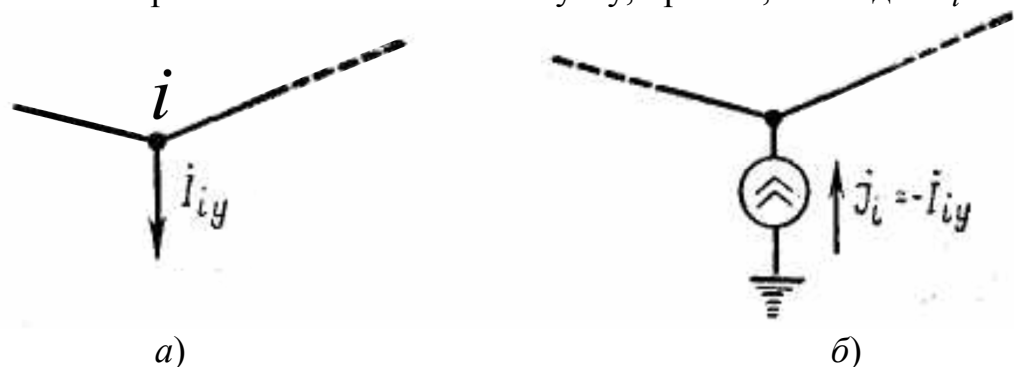


Рис. 1.1. Варианты представления нагрузок в узловых точках

Совокупность нагрузочных токов, которые иногда называются *узловыми*, может характеризоваться столбцевой матрицей.

Совокупность задающих токов, отвечающих этим нагрузкам, может быть записана также в форме столбцевой матрицы

$$\dot{\mathbf{I}}_y = \begin{pmatrix} \dot{I}_{1y} \\ \dot{I}_{2y} \\ \vdots \\ \dot{I}_{ny} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \vdots \\ \dot{J}_n \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \dot{\mathbf{J}} = -\dot{\mathbf{I}}_y$$

Искомыми величинами при расчетах токораспределения в сети являются токи в ветвях, совокупность которых тоже можно записать в виде столбцевой матрицы:

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_m \end{pmatrix}$$

Целью расчета токораспределения является определение матрицы токов ветвей. Поскольку токи в ветвях зависят от задающих токов, параметров элементов схемы сети и ее конфигурации, а также от Э.Д.С. Имеющихся в схеме, то задача нахождения токораспределения требует установления взаимной связи между всеми перечисленными величинами в матричной форме. При этом в виде матриц должны быть записаны совокупности токов, Э.Д.С. и параметров элементов сети; кроме того, в матричной форме должна быть отражена конфигурация схемы сети.

Взаимная связь между этими матрицами устанавливается уравнениями, которые отвечают I и II законам Кирхгофа. Уравнения I закона Кирхгофа, как известно, записываются при определении токораспределения для токов в ветвях, сходящихся во всех узлах схемы, кроме одного, который выбирается произвольно и называется *балансирующим узлом*. Уравнения II закона Кирхгофа записываются для всех независимых контуров схемы.

1.2. Аналитическое представление конфигурации расчетной схемы сети

На рис. 1.2 показан пример расчетной схемы многоконтурной сети. Взаимная связь шести ветвей и четырех узлов этой схемы показана отдельно на рис. 1.3. Если каждой ветви схемы поставить в соответствие некоторое произвольно выбранное направление, то будет получена схема, которая называется *направленным графом*.

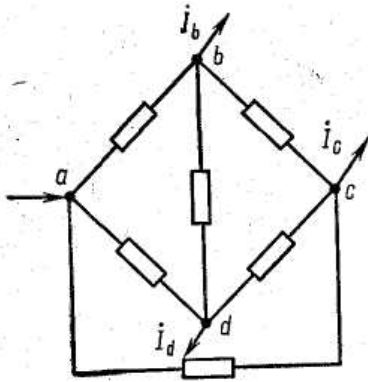
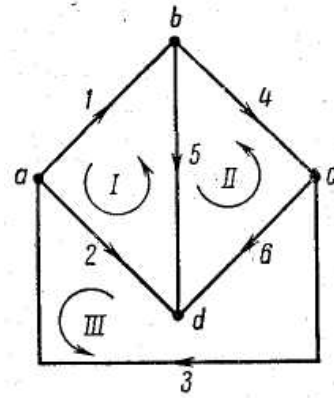


Рис. 1.2. Расчетная схема

Рис. 1.3. Направленный граф
схемы

Направленный граф характеризует конфигурацию — геометрический образ схемы. Для его аналитического представления необходимо провести нумерацию ветвей и независимых контуров и выбрать направление обходов этих контуров, принимаемое за положительное. Направленный граф схемы может быть описан с помощью двух матриц, называющихся 1 и 2-й *матрицами соединений*, или *инциденций*. Первая матрица соединений \mathbf{M} , называемая иногда *матрицей соединений в узлах*, представляет собой таблицу, каждая строка которой отвечает одному из узлов схемы, за исключением балансирующего, а каждый столбец — одной из ее ветвей. В клетках этой таблицы проставляется «0», если ветвь не связана с узлом, которому соответствует строка. Если же ветвь связана с узлом, то в клетке проставляется либо «+1», либо «-1», в зависимости от направления ветви в направленном графе схемы. Если данный узел является началом ветви, и ветвь выходит из рассматриваемого узла, то в матрице соединений (инциденций) ставится «+1». Если же ветвь входит в узел, который в этом случае считается концом ветви, то в соответствующей клетке первой матрицы соединений проставляется «-1».

Применительно к направленному графу, показанному на рис. 1-3, первая матрица соединений, составленная по сформулированному правилу при балансирующем узле a , имеет вид:

$$\mathbf{M} = \left\| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} b \\ c \\ d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} b \\ c \\ d \end{array}} \right\} \text{узлы}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad}_{\text{ветви}} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Вторая матрица соединений (инциденций) \mathbf{N} , называемая также *матрицей соединений в контурах*, представляет собой таблицу, строки которой отвечают независимым контурам направленного графа схемы, а столбцы — его ветвям. Если та или иная ветвь входит в контур, то на пересечении соответствующих строки и столбца матрицы \mathbf{N} ставится либо «+1», либо «-1», в зависимости от того, совпадает направление ветви с направлением обхода контура или имеет противоположное ему направление. Если же ветвь не входит в контур, то в матрице \mathbf{N} на пересечении строки и столбца, отвечающих рассматриваемым

контур и ветви, записывается «0». Это правило образования 2-й матрицы соединений позволяет для направленного графа схемы, изображенной на рис. 1.3, получить:

$$\mathbf{N} = \left\| \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}} \right\} \text{контуры}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad}_{\text{ветви}} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

В схеме сети и ее направленном графе удобно выделить две группы ветвей. Первая из них образует так называемое *дерево сети* (графа), а вторая – ее *хорды*. К дереву относится наименьшая часть замкнутой схемы, ветви которой соединяют балансирующий узел со всеми другими узлами. В сложной схеме могут быть выделены несколько деревьев. На рис. 1.4, а, б, в показаны примеры деревьев, отвечающих схеме сети, приведенной на рис. 1.3. Причем ветви, входящие в дерево, отмечены сплошными линиями, а ветви, являющиеся хордами – штриховыми. Для всех деревьев схемы характерно равенство числа ветвей (1...4) числу узлов (b...d), без балансирующего узла, поэтому 1-я матрица соединений (инциденций) для дерева схемы \mathbf{M} имеет квадратную форму.

При нумерации ветвей направленного графа целесообразно ветвям, входящим в дерево, присваивать последовательные номера, начиная с первого. Если в рассматриваемом примере направленного графа (см. рис. 1.3) в дерево включить ветви 1, 2 и 3 (рис. 1.4, а), то в первой матрице соединений первые три столбца будут отвечать дереву схемы, а последующие – ее хордам.

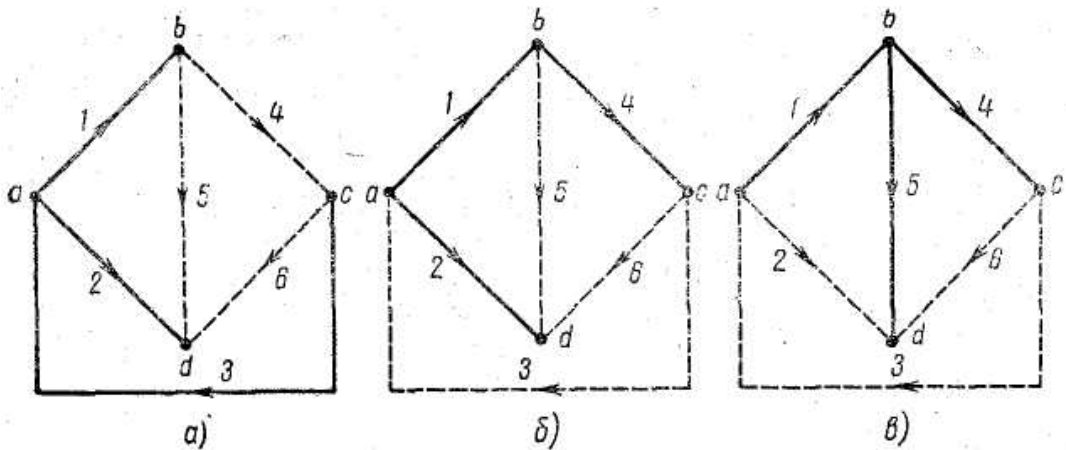


Рис. 1.4. Варианты составления дерева сети (графа)

Нетрудно видеть, что в этом случае матрица \mathbf{M} может быть разбита на две подматрицы \mathbf{M}_α и \mathbf{M}_β :

$$\begin{array}{c}
 \text{ветви} \\
 \overbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6} \\
 \mathbf{M} = \left\| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right\| = \left\| \mathbf{M}_\alpha \quad \mathbf{M}_\beta \right\| \\
 \underbrace{\hspace{10em}} \quad \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \mathbf{M}_\alpha \quad \mathbf{M}_\beta
 \end{array}$$

В сложной матрице \mathbf{M} при таком подходе подматрица \mathbf{M}_α характеризует связь ветвей дерева схемы с ее узлами, а подматрица \mathbf{M}_β – взаимную связь между хордами и узлами схемы.

1.3. Уравнения законов Кирхгофа и Ома в матричной форме

Найдем произведение первой матрицы соединений и столбцевой матрицы токов в ветвях этой схемы:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \\ \dot{i}_4 \\ \dot{i}_5 \\ \dot{i}_6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -\dot{i}_1 + \dot{i}_4 + \dot{i}_5 \\ \dot{i}_3 - \dot{i}_4 + \dot{i}_6 \\ -\dot{i}_2 - \dot{i}_5 - \dot{i}_6 \end{array} \right\|$$

Примем, что токи в ветвях имеют направление, совпадающее с направлением соответствующих ветвей в направленном графе (рис. 1.5). Тогда в соответствии с I законом Кирхгофа будем иметь:

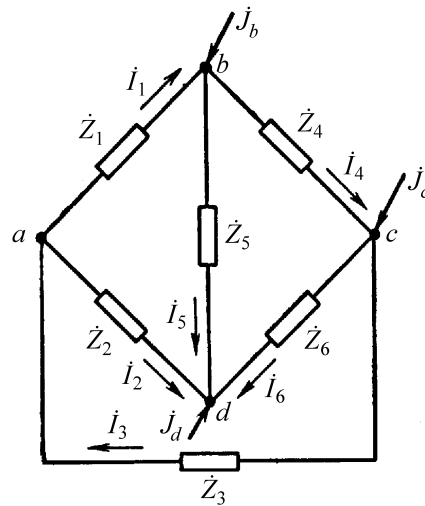


Рис. 1.5. Направленный граф схемы электрической сети

$$\begin{aligned}
 a \quad & -\dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = \dot{J}_b, \\
 b \quad & \dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = \dot{J}_c, \\
 c \quad & -\dot{I}_2 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 = \dot{J}_d.
 \end{aligned}$$

Алгебраические суммы в левых частях записанных уравнений образуют матрицу, полученную при умножении матриц \mathbf{M} и $\dot{\mathbf{I}}$. Следовательно,

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{J}}. \quad (1.1)$$

Это матричное уравнение в обобщенной форме определяет I закон Кирхгофа.

Запишем совокупность падений напряжения в сопротивлениях ветвей рассматриваемой схемы в форме столбцевой матрицы:

$$\dot{\mathbf{U}}_{\text{BZ}} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{1z} \\ \dot{U}_{2z} \\ \dot{U}_{3z} \\ \dot{U}_{4z} \\ \dot{U}_{5z} \\ \dot{U}_{6z} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение второй матрицы соединений \mathbf{N} на матрицу $\dot{\mathbf{U}}_{\text{BZ}}$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_{1z} \\ \dot{U}_{2z} \\ \dot{U}_{3z} \\ \dot{U}_{4z} \\ \dot{U}_{5z} \\ \dot{U}_{6z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot{U}_{1z} + \dot{U}_{2z} - \dot{U}_{5z} \\ -\dot{U}_{4z} + \dot{U}_{5z} - \dot{U}_{6z} \\ -\dot{U}_{2z} - \dot{U}_{3z} + \dot{U}_{6z} \end{vmatrix}$$

В результате перемножения получена матрица, каждая строка которой определяет сумму падений напряжения в сопротивлениях ветвей в одном из независимых контуров. В рассмотренном частном примере каждая из этих сумм равна нулю. В общем случае, при наличии Э.Д.С. в ветвях схемы, сумма падений напряжения в сопротивлениях ветвей, составляющих независимые контуры, в соответствии со II законом Кирхгофа должна быть равна сумме Э.Д.С., входящих в соответствующий контур. Если совокупность таких сумм, каждая из которых определяет Э.Д.С., называемую *контурной*, записать в форме столбцовой матрицы, то II закон Кирхгофа получит выражение:

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}_{BZ} = \dot{\mathbf{E}}_K \quad (1.2)$$

Предположим, что источники э.д.с. включены в каждую из ветвей схемы и их совокупность образует столбцовую матрицу $\dot{\mathbf{E}}$. В этом случае матрица $\dot{\mathbf{E}}$ полностью подобна матрице $\dot{\mathbf{U}}_{BZ}$. Поэтому произведение матрицы \mathbf{N} на матрицу $\dot{\mathbf{E}}$ определит матрицу, в каждой строке которой будет сумма Э.Д.С., входящих в один независимый контур, аналогично тому, как произведение матриц \mathbf{N} и $\dot{\mathbf{U}}_{BZ}$ определило матрицу суммы падений напряжения в ветвях этих контуров. Следовательно,

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_K, \quad (1.3)$$

а уравнение (1.2) может быть также записано в виде

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}_{BZ} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{E}}$$

или

$$\mathbf{N}(\dot{\mathbf{U}}_{BZ} - \dot{\mathbf{E}}) = 0. \quad (1.4)$$

Падения напряжения в сопротивлениях ветвей зависят от токов и сопротивлений этих ветвей. Аналитически имеющаяся здесь зависимость может быть записана в матричной форме с помощью матрицы сопротивлений ветвей. Эта матрица имеет квадратную форму, ее строки и столбцы отвечают ветвям рассматриваемой схемы. Сопротивления ветвей располагаются по главной диагонали этой матрицы. Если же в схеме имеются ветви, связанные магнитным потоком взаимной индукции, то матрица сопротивлений ветвей должна содержать

сопротивления взаимной индукции на пересечении строк и столбцов, отвечающих магнитно связанным ветвям. Матрица сопротивлений ветвей, составленная по такому принципу применительно к схеме рис. 1.5, имеет вид

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\text{в}} = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_6 \end{vmatrix}$$

Произведение матрицы сопротивлений в ветвях и матрицы токов ветвей позволяет получить матрицу падений напряжения в сопротивлениях ветвей.

$$\begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \\ \dot{i}_4 \\ \dot{i}_5 \\ \dot{i}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 \dot{i}_1 \\ \dot{Z}_2 \dot{i}_2 \\ \dot{Z}_3 \dot{i}_3 \\ \dot{Z}_4 \dot{i}_4 \\ \dot{Z}_5 \dot{i}_5 \\ \dot{Z}_6 \dot{i}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}_{1z} \\ \dot{U}_{2z} \\ \dot{U}_{3z} \\ \dot{U}_{4z} \\ \dot{U}_{5z} \\ \dot{U}_{6z} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в обобщенной форме можно записать:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\text{в}} \dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{U}}_{\text{вz}}. \quad (1.5)$$

Из (1-4) и (1-5) имеем

$$\mathbf{N}(\dot{\mathbf{Z}}_{\text{в}} \dot{\mathbf{i}} - \dot{\mathbf{E}}) = 0.$$

Обозначим:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\text{в}} \dot{\mathbf{i}} - \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{U}}_{\text{в}}, \quad (1.6)$$

где $\dot{\mathbf{U}}_{\text{в}}$ — матрица падений напряжения в ветвях, в общем случае содержащих Э.Д.С. Выражение (1.6) является матричной формой записи закона Ома.

1.4. «Прямой» метод расчета токораспределения в электрической сети

Метод расчета, основанный на применении уравнений I и II законов Кирхгофа без какого-либо их предварительного преобразования, может быть условно назван «прямым» методом расчета сети. Задача расчета при этом заключается в определении токов в ветвях схемы на основании системы обобщенных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{I}} &= \mathbf{J}, \\ \mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}_{\text{BZ}} &= \dot{\mathbf{E}}_{\text{K}}, \\ \mathbf{Z}_{\text{B}}\dot{\mathbf{I}} &= \dot{\mathbf{U}}_{\text{BZ}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

При решении задачи в такой постановке число уравнений в исходной системе может быть уменьшено, поскольку падение напряжения в ветвях $\dot{\mathbf{U}}_{\text{BZ}}$ не является при этом искомой величиной. Поэтому исходная система уравнений может быть принята в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{I}} &= \mathbf{J}, \\ \mathbf{N}\mathbf{Z}_{\text{B}}\dot{\mathbf{I}} &= \dot{\mathbf{E}}_{\text{K}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

В каждое уравнение системы (1.8) входит матрица искомых токов ветвей $\dot{\mathbf{I}}$. Однако каждое из них, взятое отдельно, не позволяет найти эти токи, поскольку матрицы \mathbf{M} и $\mathbf{N}\mathbf{Z}_{\text{B}}$ — не квадратные и, следовательно, для них не могут быть найдены обратные матрицы. Поэтому уравнения, входящие в систему (1.5), не могут быть преобразованы к форме, содержащей в левой части только матрицы искомых токов $\dot{\mathbf{I}}$. Для определения токов $\dot{\mathbf{I}}$ должна быть, следовательно, использована система уравнений (1.8).

Обобщенная форма решения этой системы может быть получена, если воспользоваться понятием сложной матрицы. В рассматриваемом случае в качестве блочных матриц (подматриц) следует принять \mathbf{M} , $\mathbf{N}\mathbf{Z}_{\text{B}}$, \mathbf{J} , $\dot{\mathbf{E}}_{\text{K}}$. Тогда применительно к системе (1.8) можно написать

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \mathbf{N}\mathbf{Z}_{\text{B}} \end{array} \right\| \cdot \dot{\mathbf{I}} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{J} \\ \dot{\mathbf{E}}_{\text{K}} \end{array} \right\|. \quad (1.9)$$

Применяя правило умножения матриц, нетрудно убедиться, что такая форма записи полностью соответствует системе матричных уравнений (1.8). В выражении (1.9) матрица

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \mathbf{N}\mathbf{Z}_{\text{B}} \end{array} \right\| = \dot{\mathbf{A}}$$

имеет квадратную форму, причем ее определитель не равен нулю. Такая матрица может быть обращена, и поэтому из выражения (1.9) можно найти:

$$\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \left\| \begin{array}{c} \mathbf{J} \\ \dot{\mathbf{E}}_{\text{K}} \end{array} \right\| \quad (1.10)$$

Недостаток метода определяется, прежде всего, необходимостью обращения матрицы $\dot{\mathbf{A}}$, имеющей для сложной сети высокий порядок. Матрица $\dot{\mathbf{A}}$ к тому же имеет большое количество нулевых элементов, что ведет к неэкономному

использованию памяти машины, и большое количество операций умножения и сложения оказываются излишними, так как они выполняются с нулевыми числами.

1.5. Определение напряжений в узлах схемы

Напряжения в узлах схемы, наряду с токами в ее ветвях, являются параметрами режима схемы. Эти напряжения, называемые иногда *узловыми напряжениями*, зависят от токораспределения, поскольку они отличаются друг от друга на величины падений напряжения в ветвях.

При известной матрице токов в ветвях \mathbf{I} матрица падений напряжения в ветвях определяется уравнением (1.6), отвечающим закону Ома. Для определения узловых напряжений, однако, недостаточно определения матрицы \dot{U}_B , так как при одних и тех же падениях напряжения в ветвях можно иметь разные напряжения в узлах схемы. Задача нахождения узловых напряжений приобретает единственное решение в том случае, если произвольно принимается значение напряжения в одном из узлов. Такой узел называется *базисным*, так же как и принятое в нем напряжение. Это напряжение в дальнейшем обозначается как \dot{U}_0 .

При известном базисном напряжении связь между матрицей узловых напряжений и матрицей падения напряжения в ветвях устанавливается с помощью транспонированной первой матрицы соединений \mathbf{M}_t или аналогичной ей по структуре матрицей \mathbf{M}'_t . \mathbf{M}_t вводится в расчеты в том случае, когда базисный узел совмещается с балансирующим, \mathbf{M}'_t — при несовпадении этих узлов.

Обратимся к направленному графу сети (рис. 1.3) и будем рассматривать случай совмещения базисного и балансирующего узлов с узлом графа a . В этом случае можно записать произведение матрицы \mathbf{M}'_t и матрицы падений напряжения от всех остальных узлов схемы до базисного узла.

Для обозначений на рисунке 1.5 получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_b - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_c - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_d - \dot{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{U}_b + \dot{U}_0 \\ -\dot{U}_d + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_c - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_b - \dot{U}_0 - \dot{U}_c + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_b - \dot{U}_0 - \dot{U}_d + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_c - \dot{U}_0 - \dot{U}_d + \dot{U}_0 \end{pmatrix}$$

В результате умножения получена матрица, элементами которой являются падения напряжения в ветвях. Следовательно, при совмещении базисного и

балансирующего узлов получаем произведение:

$$\mathbf{M}_t \cdot (\dot{U}_y - \dot{U}_0) = \dot{U}_B \quad (1.11)$$

или, обозначая:

$$\begin{aligned} \dot{U}_y - \dot{U}_0 &= \dot{U}_\Delta \\ \mathbf{M}_t \cdot \dot{U}_\Delta &= \dot{U}_B \end{aligned} \quad (1.12)$$

При несовпадении базисного и балансирующего узлов для установления связи между матрицами \dot{U}_Δ и \dot{U}_B должна быть предварительно составлена матрица \mathbf{M}' . Эта матрица может быть получена из 1-й матрицы соединений, составленной с учетом всех узлов направленного графа схемы (включая балансирующий и базисный), путем вычеркивания строки, отвечающей базисному узлу. В рассмотренном примере направленного графа такая матрица при выборе в качестве базисного узла b :

$$\mathbf{M}' = \left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & d \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array} \right\| \begin{array}{l} \text{узлы} \\ \text{ветви} \end{array}$$

или

$$\mathbf{M}' = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right\|$$

Умножая транспонированную матрицу \mathbf{M}' на матрицу \dot{U}_Δ , находим

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_a - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_c - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_d - \dot{U}_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_a + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_a - \dot{U}_d \\ -\dot{U}_a + \dot{U}_c \\ -\dot{U}_c + \dot{U}_0 \\ -\dot{U}_d + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_c - \dot{U}_d \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{array} \right\|,$$

или в обобщенной форме,

$$\mathbf{M}'_t \cdot \dot{U}_\Delta = \dot{U}_B \quad (1.13)$$

Последнее выражение имеет общий характер, тогда как (1.12) отвечает частному случаю. Поэтому в дальнейшем уравнение, устанавливающее связь между матрицами $\dot{\mathbf{U}}_{\Delta}$ и $\dot{\mathbf{U}}_{\text{B}}$, записывается в форме в последней форме (1.13). Из выражений (1.6) и (1.13) следует, что:

$$\mathbf{M}'_t \dot{\mathbf{U}}_{\Delta} = \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}} \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{E}},$$

или, поскольку матрица сопротивлений ветвей $\dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}$ квадратная и неособенная,

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \mathbf{M}'_t \dot{\mathbf{U}}_{\Delta} = \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \dot{\mathbf{E}}.$$

Умножая правую и левую части полученного выражения на матрицу \mathbf{M} , получаем:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \mathbf{M}'_t \dot{\mathbf{U}}_{\Delta} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{I}} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \dot{\mathbf{E}}$$

или,

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \mathbf{M}'_t \dot{\mathbf{U}}_{\Delta} = \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \quad (1.14)$$

В правую часть этого матричного уравнения входят матрицы известных величин, являющихся исходными данными для расчета параметров режима схемы. В левой части этого уравнения имеется произведение трех матриц $\mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \mathbf{M}'_t$, результатом которого является некоторая матрица, имеющая размерность проводимости. Принимая

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \mathbf{M}'_t = \dot{\mathbf{Y}}_{\text{y}} \quad (1.15)$$

имеем из (1-14);

$$\dot{\mathbf{Y}}_{\text{y}} \dot{\mathbf{U}}_{\Delta} = \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{Z}}_{\text{B}}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \quad (1.16)$$

Матрицу $\dot{\mathbf{Y}}_{\text{y}}$ называют *матрицей узловых проводимостей*, а уравнение — *узловым уравнением*, записанным с использованием матрицы узловых проводимостей.

Матрица узловых проводимостей имеет число строк и столбцов, равное числу узлов схемы без одного – базисного.

В этом можно убедиться, приняв во внимание следующие особенности операции умножения матриц. При умножении двух матриц матрица-произведение получает число строк, равное числу строк первой матрицы-сомножителя, а число столбцов – равное числу столбцов во второй матрице-сомножителе. В матрице \mathbf{M} число строк равно числу узлов в схеме без балансирующего ($n - 1$), а в матрице

$\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}$ число столбцов равно числу ветвей в схеме (m), следовательно, матрица $\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}$ имеет $(n-1)$ строк и m столбцов. Матрица \mathbf{M}'_t имеет число столбцов, равное числу узлов в схеме без базисного, т.е. $(n-1)$. Следовательно, произведение $\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t$ определяет матрицу $\dot{\mathbf{Y}}_y$, которая имеет $(n-1)$ строк и $(n-1)$ столбцов.

Квадратная матрица $\dot{\mathbf{Y}}_y$ – неособенная, поэтому из (1.14) можно получить:

$$\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t\right)^{-1}\mathbf{j} - \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t\right)^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}$$

или, учитывая обозначения (1.15),

$$\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \dot{\mathbf{Y}}_y^{-1}\mathbf{j} - \dot{\mathbf{Y}}_y^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}. \quad (1.17)$$

Элементы матрицы $\dot{\mathbf{Y}}_y^{-1} = \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t\right)^{-1}$ имеют размерность сопротивления, поэтому принимают обозначение:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Y}}_y^{-1} = \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t\right)^{-1}, \quad (1.18)$$

причем матрицу $\dot{\mathbf{Z}}$ называют *матрицей узловых сопротивлений*.

С учетом этого уравнение (1.17) записывается

$$\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \dot{\mathbf{Z}}\mathbf{j} - \dot{\mathbf{Y}}_y^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}. \quad (1.19)$$

Это уравнение называют *узловым уравнением*, записанным с использованием матрицы узловых сопротивлений. Из него, принимая во внимание, что $\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \dot{\mathbf{U}}_y - \dot{\mathbf{U}}_0$, можно получить матрицу искомых узловых напряжений

$$\dot{\mathbf{U}}_y = \dot{\mathbf{U}}_0 + \dot{\mathbf{Z}}\mathbf{j} - \dot{\mathbf{Y}}_y^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}. \quad (1.20)$$

1.6. Расчеты токораспределения с помощью метода узловых напряжений

Число уравнений при определении токораспределения можно уменьшить, выразив искомые токи через падения напряжения в ветвях рассчитываемой схемы. Падения напряжений находятся как разность напряжений в узлах, что и определило, как известно, название метода расчета. Число узлов в любой схеме всегда меньше числа ветвей в ней, поэтому вычисление напряжений в узлах является всегда более простой задачей, нежели непосредственное определение токов прямым методом, предусматривающим выполнение операций с матрицами, имеющими порядок, равный числу ветвей в схеме.

Связь токов в ветвях с напряжениями в узлах определяется в матричной форме выражением:

$$\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}, \quad (1.21)$$

откуда следует, что:

$$\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{Z}}_{\text{В}}^{-1} \mathbf{M}' \dot{\mathbf{U}}_{\Delta} + \dot{\mathbf{Z}}_{\text{В}}^{-1} \dot{\mathbf{E}}. \quad (1-22)$$

Эта формула требует для определения искомого тока предварительного вычисления матриц $\dot{\mathbf{Z}}_{\text{В}}^{-1}$ и $\dot{\mathbf{U}}_{\Delta}$.

Структуру обращенной матрицы сопротивлений ветвей рассмотрим на примере кольцевой сети с тремя ветвями в расчетной схеме – рис. 1.6.

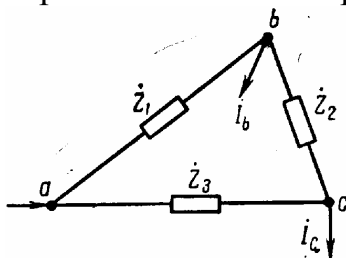


Рис. 1.6. Пример схемы сети с тремя ветвями

Для этой сети:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\text{В}} = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_3 \end{vmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\text{В}}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\dot{Z}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\dot{Z}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\dot{Z}_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Y}_3 \end{vmatrix}.$$

Элементами обобщенной матрицы сопротивлений ветвей являются проводимости этих ветвей, являющиеся обратными величинами элементов обращаемой матрицы. Это справедливо для любой диагональной матрицы.

Вычисление матрицы $\dot{\mathbf{U}}_{\Delta}$ требует решения узлового уравнения, что связано с необходимостью обращения матрицы узловых проводимостей. В сложных сетях с большим количеством узлов в расчетных схемах выполнение этой операции может быть сопряжено с большими трудностями. Известен ряд предложений по преодолению возникающих затруднений. Некоторые из них предусматривают предварительные преобразования матрицы узловых проводимостей, облегчающие ее обращение. Другие основаны на предварительных упрощениях расчетной схемы, при которых удастся уменьшить число узлов в ней. Наибольшее же распространение получил способ решения узлового уравнения методом итерации (последовательных приближений) при записи этого уравнения с использованием матрицы узловых проводимостей.

Матрица узловых проводимостей \dot{Y}_y определяется как произведение трех матриц (выражение 1.15). Выполним эту операцию применительно к сети, схема замещения которой показана на рис.1.7, а, а ее направленный граф на рис. 1.7, б.

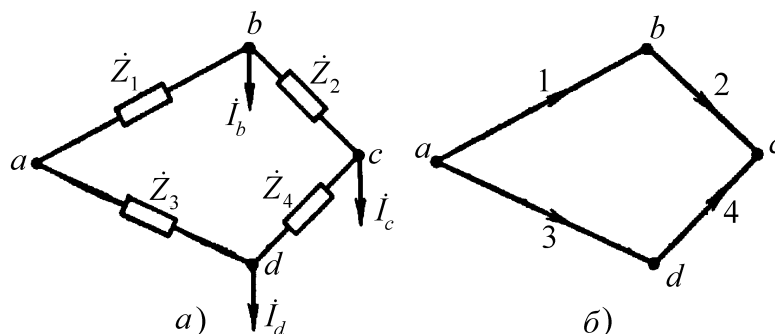


Рис. 1.7. Схема сети и ее граф

Принимая за балансирующий узел a , будем иметь:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{Y}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Y}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Y}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{Y}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot{Y}_1 & \dot{Y}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{Y}_2 & 0 & -\dot{Y}_4 \\ 0 & 0 & -\dot{Y}_3 & \dot{Y}_4 \end{vmatrix}.$$

При совмещении базисного и балансирующего узлов

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}'_t = \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1}\mathbf{M}_t &= \begin{vmatrix} -\dot{Y}_1 & \dot{Y}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{Y}_2 & 0 & -\dot{Y}_4 \\ 0 & 0 & -\dot{Y}_3 & \dot{Y}_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & -\dot{Y}_2 & 0 \\ -\dot{Y}_2 & \dot{Y}_2 + \dot{Y}_4 & -\dot{Y}_4 \\ 0 & -\dot{Y}_4 & \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Каждая строка полученной матрицы отвечает одному узлу, так же как и каждый ее столбец. Следовательно:

$$\dot{Y}_y = \left. \begin{vmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & -\dot{Y}_2 & 0 \\ -\dot{Y}_2 & \dot{Y}_2 + \dot{Y}_4 & -\dot{Y}_4 \\ 0 & -\dot{Y}_4 & \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4 \end{vmatrix} \right\} \begin{matrix} b \\ c \\ d \end{matrix} \text{ узлы (без балансирующего)}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\substack{a \quad c \quad d \\ \text{(без балансирующего) }}}$$

На главной диагонали матрицы \dot{Y}_y расположены элементы, представляющие сумму проводимостей ветвей, связанных с одним из узлов схемы. Другими элементами этой матрицы являются проводимости ветвей с обратным знаком

между узлами, которым отвечают соответствующие столбцы и строки матрицы.

При несовпадении базисного и балансирующего узлов строки матрицы \dot{Y}_y отвечают также всем узлам, кроме балансирующего, тогда как столбцы этой матрицы соответствуют всем узлам, включая балансирующий, но без базисного узла. Если в рассматриваемом примере за балансирующий по-прежнему считать узел a , а за базисный – узел b , то в результате перемножения матриц можно получить:

$$\dot{Y}_y = \mathbf{M}\dot{Z}_B^{-1}\mathbf{M}'_t = \left\| \begin{array}{ccc|c} -\dot{Y}_1 & -\dot{Y}_2 & 0 & b \\ 0 & \dot{Y}_2 + \dot{Y}_4 & -\dot{Y}_4 & c \\ -\dot{Y}_3 & -\dot{Y}_4 & \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4 & d \end{array} \right\} \text{узлы (без балансирующего)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{a \qquad c \qquad d \\ \text{(без базисного)}}$$

В этом случае на главной диагонали при совпадении индексов строк и столбцов опять расположены элементы, являющиеся суммой проводимостей ветвей, связанных с одним из узлов схемы. Все остальные элементы матрицы представляют собой взятые с обратным знаком проводимости ветвей между узлами, которые отвечают пересекающимся в данном элементе строкам и столбцам матрицы.

Непосредственным умножением матриц $\mathbf{M}\dot{Z}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}$ можно убедиться, что результатом его является столбцевая матрица. Каждая строка этой матрицы представляет собой сумму произведений вида $\sum \dot{E}\dot{Y}_i$, где \dot{E} – Э.Д.С. в ветви, связанной с узлом, которому отвечает строка матрицы, \dot{Y} – проводимость этой ветви. Операция суммирования производится для всех ветвей, сходящихся в данном узле. При этом Э.Д.С. принимается положительной, если она направлена от узла, и отрицательной, если она направлена к узлу.

Правила составления матрицы узловых проводимостей \dot{Y}_y и матрицы $\mathbf{M}\dot{Z}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}}$ непосредственно по схеме замещения сети без предварительных операций с матрицами соединений позволяют упростить подготовку к непосредственному расчету режима сети.

1.7. Расчеты токораспределения методом контурных токов

Метод контурных токов, так же как и метод узловых напряжений, позволяет уменьшить число уравнений в системе, определяющих токи в ветвях схемы. При использовании матричной формы записи уравнений это отражается в снижении порядка матриц, с которыми осуществляются операции при решении задачи. Метод контурных токов предусматривает исключение из системы уравнений токов, которые протекают в ветвях, входящих одновременно в два независимых

откуда при учете (1.23) следует, что:

$$\left. \begin{aligned} i'_5 &= -i_{кI} + i_{кII}; \\ i'_6 &= -i_{кII} + i_{кIII}; \\ i'_2 &= i_{кI} - i_{кIII}. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

В матричной форме связь между токами в ветвях и контурными токами может быть установлена с помощью транспонированной 2-й матрицы соединений.

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

произведение матриц \mathbf{N}_t и $\dot{\mathbf{I}}_к$ позволяет получить

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_{кI} \\ i_{кII} \\ i_{кIII} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i_{кI} \\ i_{кI} - i_{кIII} \\ -i_{кIII} \\ -i_{кII} \\ -i_{кI} + i_{кII} \\ -i_{кII} + i_{кIII} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \\ i'_4 \\ i'_5 \\ i'_6 \end{vmatrix},$$

т.е.

$$\mathbf{N}_t \dot{\mathbf{I}}_к = \dot{\mathbf{I}}'. \quad (1.25)$$

Учитывая влияние задающих токов на токи в ветвях, предположим, что задающие токи распределяются по ветвям, образующим дерево графа схемы. Схема, отвечающая такому предположению, показана на рисунке 1.9, где ветви дерева отмечены сплошными линиями, а хорды, мысленно исключенные из схемы,—штриховыми.

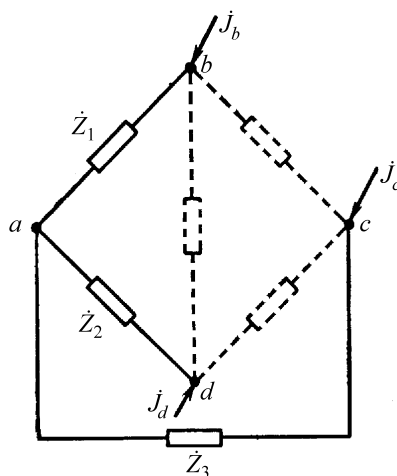


Рис. 1.9. Условное разделение схемы сети на ветви «дерева» и хорды

Уравнение I закона Кирхгофа для системы токов этой схемы записывается в форме:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{I}}'' = \mathbf{J}$$

или

$$\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \dot{\mathbf{I}}'' = \mathbf{J}. \quad (1.26)$$

Здесь \mathbf{M}_α – неособенная квадратная матрица, $\mathbf{M}_\beta = 0$, поскольку в схеме хорды отсутствуют.

Следовательно, можно написать:

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{M}_\alpha \\ 0 \end{array} \right\| \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}''_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J},$$

откуда

$$\dot{\mathbf{I}}''_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{J}$$

или

$$\dot{\mathbf{I}}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}. \quad (1.27)$$

Выражения (1-25) и (1-27) позволяют получить ток

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{N}_t \dot{\mathbf{I}}_K + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}. \quad (1.28)$$

Здесь второй член отражает влияние задающих токов на величины токов в ветвях, найденные в предположении распределения задающих токов по ветвям дерева схемы. Таким образом, матрица составляющих токов в ветвях $\dot{\mathbf{I}}''$ должна считаться заданной, тогда как матрица контурных токов содержит неизвестные величины, причем обе матрицы отвечают I закону Кирхгофа. Если найти контурные токи так, чтобы матрица суммарных токов в ветвях I удовлетворяла бы и II закону Кирхгофа, то контурные токи будут соответствовать истинному токораспределению в схеме. Из выражений (1.2), (1.5) и (1.28) имеем

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \left(\mathbf{N}_t \dot{\mathbf{I}}_K + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J} \right) = \dot{\mathbf{E}}_K$$

или

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \mathbf{N}_t \dot{\mathbf{I}}_K = \dot{\mathbf{E}}_K - \mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}. \quad (1.29)$$

Произведение матриц $\mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B\mathbf{N}_t$ дает квадратную неособенную матрицу, элементами которой являются комплексные коэффициенты, имеющие размерность сопротивления. Эту матрицу, обозначаемую

$$\dot{\mathbf{Z}}_K = \mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B\mathbf{N}_t,$$

называют *матрицей контурных сопротивлений*. При этом уравнение (1.29) может быть представлено в виде:

$$\dot{\mathbf{Z}}_K \dot{\mathbf{I}}_K = \dot{\mathbf{E}}_K - \mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}. \quad (1.30)$$

Оно может быть названо *контурным уравнением*, записанным с использованием матрицы контурных сопротивлений. Из (1.30) следует, что:

$$\dot{\mathbf{I}}_K = \dot{\mathbf{Z}}_K^{-1} \left(\dot{\mathbf{E}}_K - \mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J} \right) = \dot{\mathbf{Y}}_K \dot{\mathbf{E}}_K - \dot{\mathbf{Y}}_K \mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}. \quad (1.31)$$

Матричное уравнение (1.31) разрешено относительно матрицы искомых контурных токов. Это уравнение также является контурным уравнением, но записанным с использованием матрицы контурных проводимостей. При найденной матрице контурных проводимостей токи в ветвях могут быть вычислены с помощью выражения (1.28).

1.8. Итерационные методы решения узлового и контурного уравнений

Непосредственно определить матрицы узловых напряжений и контурных токов можно на основании узлового и контурного уравнений в формах, требующих вычисления обратных матриц. В первом случае приходится обращать матрицу узловых проводимостей, во втором – матрицу контурных сопротивлений. При расчетах сложных сетей с большим числом узлов и независимых контуров обращение матриц высокого порядка может вызвать значительные затруднения.

Применяя метод итераций, можно упростить решение узловых и контурных уравнений. При этом уравнения записываются в форме, не предусматривающей вычисления обратных матриц:

$$\dot{\mathbf{Y}}_y \dot{\mathbf{U}}_\Delta = \mathbf{J} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_B^{-1} \dot{\mathbf{E}}; \quad (1.32)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}_K \dot{\mathbf{I}}_K = \dot{\mathbf{E}}_K - \mathbf{N}\dot{\mathbf{Z}}_B \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}. \quad (1.33)$$

Эти матричные уравнения по своей структуре полностью идентичны. В левых их частях имеются произведения квадратных матриц некоторых комплексных коэффициентов на столбцовые матрицы искомых величин. Правые части уравнений содержат матрицы известных величин. Идентичность уравнений позволяет использовать для них одни и те же методы решения.

Рассмотрим два способа решения уравнений методом итераций. Первый – на примере и при обозначениях узлового уравнения, а второй – на примере и при обозначениях контурного уравнения. Оба метода справедливы для обоих из рассматриваемых уравнений.

Итерационный метод предполагает получение решения задачи как результат последовательного приближения к нему после ряда однотипных расчетов. При этом исходными данными являются произвольно принятые значения искомых величин. Применительно к узловому уравнению такими данными, принимаемыми на начальной стадии расчета (нулевая итерация), являются напряжения в $(n - 1)$ узле схемы, образующие столбцевую матрицу $\dot{U}_y^{(0)}$. Матрица $\dot{U}_y^{(0)}$ в общем случае не будет удовлетворять уравнению (1.32) в силу произвольного характера выбора напряжений, составляющих эту матрицу. Следовательно, нулевая итерация в лучшем случае позволяет получить лишь достаточно близкое приближение напряжений в узлах к фактическим значениям.

Правые части уравнений (1.32) в той или иной степени будут отличаться от левых. Для удовлетворения этих уравнений необходимо внести поправки в принятые на стадии нулевой итерации напряжения в узлах схемы, выполнив расчеты следующей – первой – итерации. Пусть схема имеет четыре узла. Один из этих узлов принят базисным, поэтому число искомых неизвестных в рассматриваемом примере будет равно трем. При $\dot{E} = 0$ из уравнения (1.32):

$$\begin{vmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_1 - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_3 - \dot{U}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \end{vmatrix}. \quad (1.34)$$

Матричному уравнению (1.34) соответствует следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{13}\dot{U}_3 &= \dot{J}_1 + (\dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{13}) \cdot \dot{U}_0; \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{23}\dot{U}_3 &= \dot{J}_2 + (\dot{Y}_{21} + \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{23}) \cdot \dot{U}_0; \\ \dot{Y}_{31}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{32}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{33}\dot{U}_3 &= \dot{J}_3 + (\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{32} + \dot{Y}_{33}) \cdot \dot{U}_0. \end{aligned}$$

При произвольно принятых напряжениях $\dot{U}_1^{(0)}$, $\dot{U}_2^{(0)}$ и $\dot{U}_3^{(0)}$ каждое из уравнений записанной системы может быть удовлетворено, если в левую часть их будет внесена некоторая поправка. Рассматриваемый способ простой итерации предусматривает внесение таких поправок лишь к одному из неизвестных, входящих в уравнение. При этом:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{11}(\dot{U}_1^{(0)} + \Delta U_1^{(1)}) + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2^{(0)} + \dot{Y}_{13}\dot{U}_3^{(0)} &= \dot{J}_1 + (\dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{13}) \cdot \dot{U}_0; \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_1^{(0)} + \dot{Y}_{22}(\dot{U}_2^{(0)} + \Delta U_2^{(1)}) + \dot{Y}_{23}\dot{U}_3^{(0)} &= \dot{J}_2 + (\dot{Y}_{21} + \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{23}) \cdot \dot{U}_0; \end{aligned}$$

$$\dot{Y}_{31}\dot{U}_1^{(0)} + \dot{Y}_{32}\dot{U}_2^{(0)} + \dot{Y}_{33}(\dot{U}_3^{(0)} + \Delta U_3^{(1)}) = J_3 + (\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{32} + \dot{Y}_{33}) \cdot \dot{U}_0.$$

откуда, рассматривая поправки $\Delta \dot{U}_1^{(1)}$, $\Delta \dot{U}_2^{(1)}$ и $\Delta \dot{U}_3^{(1)}$ в качестве неизвестных, можно найти

$$\begin{aligned} \Delta U_1^{(1)} &= \frac{1}{\dot{Y}_{11}} \left[J_1 + (\dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{13}) \cdot \dot{U}_0 - \dot{Y}_{11}\dot{U}_1^{(0)} - \dot{Y}_{12}\dot{U}_2^{(0)} - \dot{Y}_{13}\dot{U}_3^{(0)} \right]; \\ \Delta U_2^{(1)} &= \frac{1}{\dot{Y}_{22}} \left[J_2 + (\dot{Y}_{21} + \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{23}) \cdot \dot{U}_0 - \dot{Y}_{21}\dot{U}_1^{(0)} - \dot{Y}_{22}\dot{U}_2^{(0)} - \dot{Y}_{23}\dot{U}_3^{(0)} \right]; \\ \Delta U_3^{(1)} &= \frac{1}{\dot{Y}_{33}} \left[J_3 + (\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{32} + \dot{Y}_{33}) \cdot \dot{U}_0 - \dot{Y}_{31}\dot{U}_1^{(0)} - \dot{Y}_{32}\dot{U}_2^{(0)} + \dot{Y}_{33}\dot{U}_3^{(0)} \right]. \end{aligned}$$

Совокупность поправок, входящих в левые части записанных выражений, образует столбцевую матрицу $\left\| \Delta \dot{U}_y^{(1)} \right\|$, а совокупность членов в квадратных скобках правых частей образует алгебраическую сумму матриц \mathbf{J} , $\dot{\mathbf{Y}}_y \dot{\mathbf{U}}_0$ и $\dot{\mathbf{Y}}_y \dot{\mathbf{U}}_y^{(0)}$.

Выполняя операцию умножения матриц, находим:

$$\left\| \Delta \dot{U}_y^{(1)} \right\| = \left\| \frac{1}{\dot{\mathbf{Y}}_y} \right\|_{\partial} \cdot \left[\mathbf{J} + \dot{\mathbf{Y}}_y \dot{\mathbf{U}}_0 - \dot{\mathbf{Y}}_y \dot{\mathbf{U}}_y^{(0)} \right]. \quad (1.35)$$

В общем случае $\left\| \frac{1}{\dot{\mathbf{Y}}_y} \right\|_{\partial}$ – диагональная матрица, элементами которой служат обратные величины узловых проводимостей, расположенных на главной диагонали матрицы узловых проводимостей.

В рассматриваемом примере:

$$\left\| \frac{1}{\dot{\mathbf{Y}}_y} \right\|_{\partial} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\dot{Y}_{11}} & & \\ & \frac{1}{\dot{Y}_{22}} & \\ & & \frac{1}{\dot{Y}_{33}} \end{array} \right\|.$$

При наличии Э.Д.С. в ветвях схемы в правую часть матричного уравнения (1.35) должен войти член $\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{B}}^{-1}\dot{\mathbf{E}}$, имеющийся в правой части узлового уравнения (1.32). Следовательно, в общем случае:

$$\|\Delta\dot{U}_y^{(1)}\| = \left\| \frac{1}{\dot{Y}_y} \right\|_{\partial} \cdot \left[\mathbf{j} + \dot{Y}_y \dot{U}_0 - \mathbf{M}\dot{Z}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}} - \dot{Y}_y \dot{U}_y^{(0)} \right]. \quad (1.36)$$

Поправки, найденные в соответствии с этим уравнением, позволяют удовлетворить каждое из узловых уравнений, входящих в систему, отвечающую матричному узловому уравнению. При введении поправок узловые напряжения:

$$\dot{U}_y^{(1)} = \dot{U}_y^{(0)} + \|\Delta\dot{U}_y^{(1)}\|.$$

Однако эти напряжения не удовлетворяют всей системе в целом, поскольку каждая из поправок была найдена из условия удовлетворения лишь одного из уравнений этой системы. Поэтому необходимы дальнейшие уточнения узловых напряжений путем введения новых поправок. Матрица поправок второй итерации будет по структуре аналогична (1.36) с тем лишь различием, что для второй итерации исходными данными служат узловые напряжения, найденные при первой итерации, т.е.

$$\|\Delta\dot{U}_y^{(2)}\| = \left\| \frac{1}{\dot{Y}_y} \right\|_{\partial} \cdot \left[\mathbf{j} + \dot{Y}_y \dot{U}_0 - \mathbf{M}\dot{Z}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}} - \dot{Y}_y \dot{U}_y^{(1)} \right]. \quad (1.36a)$$

Сравнение (1.35) и (1.36 a) позволяет установить, что в оба эти выражения входит ряд общих членов. Поэтому, обозначая

$$\|\Delta\dot{U}_y^{(0)}\| = \left\| \frac{1}{\dot{Y}_y} \right\|_{\partial} \cdot \left[\mathbf{j} + \dot{Y}_y \dot{U}_0 - \mathbf{M}\dot{Z}_B^{-1}\dot{\mathbf{E}} \right],$$

можно для поправок любой n -й итерации написать:

$$\|\Delta\dot{U}_y^{(n)}\| = \|\Delta\dot{U}_y^{(0)}\| + \left\| \frac{1}{\dot{Y}_y} \right\|_{\partial} \cdot \dot{Y}_y \dot{U}_y^{(n-1)}, \quad (1.37)$$

а также

$$\dot{U}_y^{(n)} = \dot{U}_y^{(n-1)} + \|\Delta\dot{U}_y^{(n)}\|. \quad (1.38)$$

Если при переходе от одной итерации к другой матрица поправок уменьшается, то говорят, что итерационный процесс сходится. При этом на некоторой k -й итерации определяется матрица искоемых узловых напряжений, удовлетворяющая узловому уравнению с заданной точностью. Признаком этого является удовлетворение неравенства

$$\left\| \|\Delta\dot{U}_y^{(k)}\| \right\| \leq \varepsilon,$$

где ε – матрица малых наперед заданных величин, характеризующих принятую точность расчета.

Возможно применение способа итерации и в других формах. Другой способ рассмотрим на примере решения контурного уравнения, записанного с использованием матрицы контурных сопротивлений:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} - \mathbf{N} \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{j}. \quad (1.39)$$

Примем в качестве возможных значений искомых контурных токов совокупность токов, составляющих матрицу $\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(0)}$. Контурное уравнение (1.39) может быть удовлетворено при подстановке в его левую часть матрицы $\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(0)}$, если одновременно будет добавлена в него некоторая матрица поправок. Будем считать, что поправки вносятся в каждый из искомых токов, входящих в матрицу-произведение $\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}$. При этом имеем:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}} \left(\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(0)} + \left\| \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right\| \right) = \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} - \mathbf{N} \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{j},$$

или

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}} \left\| \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right\| = \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} - \mathbf{N} \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{j} - \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(0)} = \left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{K}}^{(0)} \right\|. \quad (1.40)$$

Квадратная матрица $\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}}$ может быть представлена суммой двух матриц: одна из них ($\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(\partial)}$) содержит элементы главной диагонали матрицы $\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}}$ при равенстве нулю остальных элементов; другая ($\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(-\partial)}$) получается при приравнивании нулю элементов главной диагонали матрицы $\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}}$. В правомерности такого представления матрицы контурных сопротивлений можно убедиться на примере матрицы, записанной для схемы с тремя независимыми контурами:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dot{Z}_{13} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{31} & \dot{Z}_{32} & \dot{Z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{Z}_{12} & \dot{Z}_{13} \\ \dot{Z}_{21} & 0 & \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{31} & \dot{Z}_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, можно записать:

$$\left(\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(\partial)} + \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(-\partial)} \right) \cdot \left\| \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right\| = \left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{K}}^{(0)} \right\|. \quad (1.41)$$

Предположим, что матрица поправок $\left\| \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right\|$ может быть определена не строго в соответствии с (1.41), а приближенно с использованием уравнения:

$$\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(\partial)} \cdot \left\| \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right\| = \left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{K}}^{(0)} \right\|. \quad (1.42)$$

В этом случае из (1.42) следует, что

$$\left\| \Delta \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right\| = \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(\partial)}^{-1} \left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{K}}^{(0)} \right\|, \quad (1.43)$$

где элементами диагональной матрицы $\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{K}(\partial)}^{-1}$ являются обратные величины

элементов главной диагонали матрицы $\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{k}(\partial)}$ (элементы только по диагонали). Однако такое определение поправок к контурным токам не отвечает уравнению (1.41). Правая часть уравнения при этом оказывается измененной на некоторую величину

$$\left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{k}}^{(1)} \right\| \approx -\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{k}(-\partial)} \cdot \left\| \Delta \dot{I}_{\mathbf{k}}^{(1)} \right\|. \quad (1.44)$$

Найденная матрица $\left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{k}}^{(1)} \right\|$ позволяет уточнить значения поправок, которые должны быть внесены в матрицу искомых контурных токов т.е.:

$$\begin{aligned} \left\| \Delta \dot{I}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right\| &= \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{k}(\partial)}^{-1} \left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{k}}^{(1)} \right\|; \\ \left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right\| &\approx -\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{k}(-\partial)} \cdot \left\| \Delta \dot{I}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right\|. \end{aligned}$$

Повторяя поочередно в процессе итерационного счета вычисления по формулам, аналогичным (1.43) и (1.44), при последовательном изменении номеров итерации, можно после серии расчетов получить для элементов матриц $\left\| \Delta \dot{U}_{\mathbf{k}}^{(n)} \right\|$ и $\left\| \Delta \dot{I}_{\mathbf{k}}^{(n)} \right\|$ значения, лежащие в пределах заданной точности расчета. Искомые контурные токи при этом определяются путем сложения токов нулевой итерации с поправками, найденными в последующих итерациях, т.е.:

$$\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \sum_{m=1}^n \left\| \Delta \dot{I}_{\mathbf{k}}^{(m)} \right\| \quad (1.45)$$

Вопросы для самопроверки

1. Из каких элементов состоит граф электрической сети?
2. Какие матрицы используются для моделирования топологии схем электрических сетей?
3. Докажите, что матрица \mathbf{M}_{α} является квадратной.
4. Покажите, используя теорему Эйлера, что матрица $\dot{\mathbf{A}}$ всегда является квадратной.
5. Какой узел в схеме сети называется балансирующим?
6. Какой узел в схеме сети называется базисным?
7. В чем основная причина использования методов узловых потенциалов и метода контурных токов?
8. Как составить матрицу узловых проводимостей?
9. В чем преимущество уравнения узловых потенциалов перед уравнением контурных токов при использовании итерационных методов?

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

Нелинейные уравнения узловых напряжений описывают установившийся режим электрической системы при задании нелинейных источников тока. В схеме замещения электрической системы нелинейным источникам тока соответствуют генераторы с заданной мощностью либо нагрузки потребителей, заданные статической характеристикой или постоянной мощностью. При заданной мощности нагрузки потребителя или генератора узловой ток задается в следующем виде:

$$J_k(\dot{U}) = \frac{\dot{S}_k^*}{\sqrt{3} \cdot \dot{U}_k^*}; \quad (2.1)$$

где $\dot{S}_k^* = \text{const}$ – сопряженная заданная мощность трех фаз k -го узла; \dot{U}_k^* – сопряженный комплекс междуфазного напряжения k -го узла; $J_k(\dot{U})$ – нелинейный ток, зависящий от напряжения.

Если мощность нагрузки потребителя задана статической характеристикой, то нелинейный ток источника определяется следующим выражением:

$$J_k(\dot{U}) = \frac{\dot{S}_k^*}{\sqrt{3} \cdot \dot{U}_k^*} = \frac{P_k(\dot{U}) - jQ_k(\dot{U})}{\sqrt{3} \cdot \dot{U}_k^*}. \quad (2.2)$$

где $P_k(\dot{U})$, $Q_k(\dot{U})$ – статические характеристики активной и реактивной нагрузок k -го узла.

2.1. Формы записи нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения узловых напряжений при задании постоянной мощности нагрузки потребителей и генераторов в узлах для системы переменного тока из четырех узлов можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{13}\dot{U}_3 &= \frac{\dot{S}_1^*}{\dot{U}_1^*} - \dot{Y}_{16}\dot{U}_6; \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{23}\dot{U}_3 &= \frac{\dot{S}_2^*}{\dot{U}_2^*} - \dot{Y}_{26}\dot{U}_6; \\ \dot{Y}_{31}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{32}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{33}\dot{U}_3 &= \frac{\dot{S}_3^*}{\dot{U}_3^*} - \dot{Y}_{36}\dot{U}_6. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

В матричной форме уравнения узловых напряжений имеют вид:

$$\dot{Y}_y \dot{U} = \sqrt{3} \dot{J}(\dot{U}) - \dot{Y}_6 \dot{U}_6, \quad (2.4)$$

где \dot{Y}_y – комплексная матрица собственных и взаимных узловых проводимостей; $\mathbf{J}(\dot{U})$ – вектор-столбец задающих токов, k -й элемент которого определяется выражением (2.1); $\dot{Y}_6 \dot{U}_6$ – вектор-столбец, k -й элемент которого равен $\dot{Y}_{k6} \dot{U}_6$; \dot{U}_6 – заданное напряжение балансирующего узла.

Каждое из записанных уравнений (2.3) соответствует балансу комплексных токов в узле. Поэтому будем называть уравнения (2.3) и (2.4) уравнениями узловых напряжений в форме баланса токов. Система из трех комплексных уравнений узловых напряжений может быть заменена системой из шести действительных уравнений. Три действительных уравнения соответствуют балансу активных токов в узлах, а три – балансу реактивных токов.

Уравнения (2.3) записаны для трех независимых узлов, в каждом из которых заданы P и Q нагрузки. В систему (2.3) не входит уравнение балансирующего (четвертого) узла. Уравнение баланса тока для балансирующего узла является следствием соответствующих уравнений для трех независимых узлов. Матрица производных системы уравнений, записанной для всех узлов, включая балансирующий, вырождена. Именно этим объясняется необходимость введения балансирующего узла, уравнение которого не включается в систему независимых нелинейных уравнений установившегося режима.

Если один из узлов – балансирующий по реактивной мощности, то его уравнение баланса реактивных мощностей (или токов) не входит в число независимых уравнений узловых напряжений. В общем случае может быть не один, а несколько балансирующих узлов. После решения системы независимых уравнений все P_r и Q_r для балансирующих узлов и Q_r для балансирующих по Q узлов определяются из уравнений баланса активных и реактивных токов для этих узлов, не входящих в число независимых уравнений узловых напряжений.

Уравнения узловых напряжений часто используются в форме баланса мощности, которые можно получить, если каждое уравнение баланса токов (2.3) умножить на сопряженный комплекс напряжения соответствующего узла. Узловые уравнения баланса мощности для системы переменного тока из четырех узлов можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1^* \cdot (\dot{Y}_{11} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \dot{U}_2 + \dot{Y}_{13} \dot{U}_3 + \dot{Y}_{16} \dot{U}_6) &= \dot{S}_1^*; \\ \dot{U}_2^* \cdot (\dot{Y}_{21} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{U}_2 + \dot{Y}_{23} \dot{U}_3 + \dot{Y}_{26} \dot{U}_6) &= \dot{S}_2^*; \\ \dot{U}_3^* \cdot (\dot{Y}_{31} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{32} \dot{U}_2 + \dot{Y}_{33} \dot{U}_3 + \dot{Y}_{36} \dot{U}_6) &= \dot{S}_3^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Эту систему можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\dot{U}_{\text{диаг}}^* (\dot{Y}_y \dot{U} + \dot{Y}_6 \dot{U}_6) = \dot{S}^*, \quad (2.6)$$

где $\dot{U}_{\text{диаг}}^*$ – диагональная матрица, k -й диагональный элемент которой равен

сопряженному комплексу напряжения k -го узла; $\dot{\mathbf{S}}^*$ – вектор-столбец сопряженных мощностей в узлах, k -й элемент которого равен заданной сопряженной мощности k -го узла.

Матричное уравнение узловых напряжений в форме баланса мощностей (2.6) можно получить в результате умножения матричного уравнения баланса токов (2.4) слева на диагональную матрицу $\dot{\mathbf{U}}_{\text{диаг}}^*$.

Чтобы получить алгебраическое уравнение баланса мощностей, необходимо уравнение баланса токов (2.4) умножить на сопряженный комплекс напряжения узла.

При учете емкостных проводимостей линий собственная проводимость узла включает половины емкостных проводимостей всех линий, соединенных с данным узлом. При расчетах режимов на ЭВМ применяют уравнения узловых напряжений, учитывающие комплексные коэффициенты трансформации.

2.2. Применение метода Гаусса для решения нелинейных уравнений узловых напряжений

Система нелинейных уравнений узловых напряжений в форме баланса токов (2.4) линейна слева и нелинейна справа. Физически эта особенность определяется тем, что все параметры схемы замещения электрической системы линейны, кроме источников токов $\dot{I}_k(\dot{U})$. Иногда говорят, что продольная часть схемы замещения линейна, а поперечная – нелинейна.

Метод Гаусса при расчете нелинейных уравнений узловых напряжений можно использовать на каждом шаге итерационного процесса, считая систему нелинейных уравнений узловых напряжений линейной на данном шаге. Зададимся начальными приближениями переменных $\dot{\mathbf{U}}^{(0)}$. Определим правые части в нелинейной системе уравнений узловых напряжений в форме баланса токов (2.3) или (2.4), т.е. вычислим элементы вектор-столбца при $\dot{U}_k = \dot{U}_k^{(0)}$:

$$\mathbf{i}(\dot{\mathbf{U}}^{(0)}) = \begin{pmatrix} \dot{I}_1(\dot{U}_1^{(0)}) \\ \dot{I}_2(\dot{U}_2^{(0)}) \\ \dot{I}_3(\dot{U}_3^{(0)}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{S_1^*}{\dot{U}_1^{*(0)}} - \dot{Y}_{16} \dot{U}_6 \\ \frac{S_2^*}{\dot{U}_2^{*(0)}} - \dot{Y}_{26} \dot{U}_6 \\ \frac{S_3^*}{\dot{U}_3^{*(0)}} - \dot{Y}_{36} \dot{U}_6 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Полагаем, что токи в узлах постоянны и определяются начальными приближениями узловых напряжений. Тогда:

$$\dot{\mathbf{Y}}_y \dot{\mathbf{U}} = \sqrt{3} \mathbf{i}(\dot{\mathbf{U}}^{(0)}). \quad (2.8)$$

Решая систему (2.8), определяем первое приближение напряжений узлов $\dot{U}_k^{(1)}$. Далее переходим ко второму шагу, т.е. определяем правые части (2.7) при значениях узловых напряжений, равных их первым приближениям:

$$\mathbf{i}(\dot{U}^{(1)}) = \mathbf{j}(\dot{U}^{(1)}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{Y}_\sigma \dot{U}_\sigma \quad (2.9)$$

Затем найдем второе приближение узловых напряжений, решая линейную систему с той же матрицей \dot{Y}_y , и так далее до тех пор, пока процесс не сойдется.

При этом каждый шаг итерационного процесса состоит из определения $\mathbf{i}(\dot{U}^{(i)})$ и решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{i}(\dot{U}^{(i)}) = \mathbf{j}(\dot{U}^{(i)}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{Y}_\sigma \dot{U}_\sigma; \quad (2.10)$$

$$\dot{Y}_y \dot{U}^{(i+1)} = \sqrt{3} \mathbf{i}(\dot{U}^{(i)}), \quad (2.11)$$

где i – номер шага.

Для решения линейной системы уравнений узловых напряжений (2.11) на каждом шаге итерационного процесса целесообразно использовать метод исключения по Гауссу. В этом случае система с комплексными переменными преобразуется в систему с действительными переменными. Для эффективного решения линейных уравнений установившегося режима по Гауссу необходимо учитывать слабую заполненность матрицы узловых проводимостей.

2.3. Применение метода Зейделя для решения нелинейных уравнений узловых напряжений

Метод Зейделя и простая итерация могут применяться для решения нелинейных уравнений узловых напряжений в форме баланса токов (2.3). По методу *простой итерации* $(i+1)$ -е приближение напряжения k -го узла определяется следующим выражением:

$$\dot{U}_k^{(i+1)} = \varphi_k(\dot{U}_1^{(i)}, \dot{U}_2^{(i)}, \dots, \dot{U}_n^{(i)}) = \frac{1}{\dot{Y}_{kk}} \left(- \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^n \dot{Y}_{kj} \cdot \dot{U}_j^{(i)} + \frac{\dot{S}_k^*}{3\dot{U}_k^{*(i)}} - \dot{Y}_{k\sigma} \dot{U}_\sigma \right), \quad (2.12)$$

где φ – нелинейная функция, определяющая итерационный процесс простой итерации.

Итерационный процесс Зейделя определяется выражением:

$$\begin{aligned} \dot{U}_k^{(i+1)} &= \varphi_{3k}(\dot{U}_1^{(i+1)}, \dot{U}_2^{(i+1)}, \dots, \dot{U}_{k-1}^{(i+1)}, \dot{U}_{k+1}^{(i)}, \dots, \dot{U}_n^{(i)}) = \\ &= \frac{1}{\dot{Y}_{kk}} \left(- \sum_{j=1}^{k-1} \dot{Y}_{kj} \cdot \dot{U}_j^{(i+1)} - \sum_{j=k+1}^n \dot{Y}_{kj} \cdot \dot{U}_j^{(i)} + \frac{\dot{S}_k^*}{3\dot{U}_k^{*(i)}} - \dot{Y}_{k\sigma} \dot{U}_\sigma \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где φ_{3k} – нелинейная функция, описывающая итерационный процесс Зейделя.

Сходимость метода Зейделя к решению нелинейных уравнений установившихся режимов медленная. Для ускорения сходимости метода Зейделя применяются ускоряющие коэффициенты, или метод неполной релаксации. Использование ускоряющих коэффициентов сводится к следующему. Обозначим $\dot{U}_k^{(i+1)}$ k -го узла, определенное на $(i+1)$ -м шаге по обычным итерационным формулам (2.13). Ускоренное $(i+1)$ -е приближение значения напряжения k -го узла $\dot{U}_{k \text{ уск}}^{(i+1)}$ определяется по формуле:

$$\dot{U}_{k \text{ уск}}^{(i+1)} = \dot{U}_k^{(i)} + t \cdot (\dot{U}_k^{(i+1)} - \dot{U}_{k \text{ уск}}^{(i)}) \quad (2.14)$$

В случае $t = 1$ получим обычный итерационный процесс метода Зейделя.

Метод Зейделя нашел широкое применение в расчетах установившихся режимов, в особенности на ранних этапах использования ЭВМ. Основное достоинство метода в том, что он легко программируется и требует малой оперативной памяти.

Вопросы для самопроверки

В чем заключается нелинейность уравнений установившегося режима?

Как из нелинейных уравнений узловых напряжений узловых напряжений в форме баланса узловых токов получить уравнения в форме баланса мощностей?

Какими методами можно решать нелинейные уравнения?

Что такое сходимость итерационного процесса и какой метод обладает наиболее надежной сходимостью?

Каковы достоинства и недостатки решения нелинейных уравнений узловых напряжений при применении на каждом шаге метода Гаусса?

Каковы достоинства и недостатки способа ускорения по методу Зейделя?