2. УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Уравнения узловых напряжений широко применяются при расчетах установившихся режимов электрических систем. Процедура формирования уравнений формализуется на основе аналитического представления конфигурации схемы замещения с помощью матрицинцинденций. Из законов Ома и Кирхгофа вытекает метод формирования математических моделей установившегося режима узловых напряжений, который является основным методом, используемым для составления системы уравнений установившегося режима. Чтобы получить такую систему, достаточно для каждого из узлов электроэнергетической системы записать уравнения первого закона Кирхгофа, а затем токи ветвей заменить с помощью напряжения прилежащих узлов, воспользовавшись для этого законом Ома [1]. Первый закон Кирхгофа в матричной форме записи выглядит следующим образом:

$$MU = I \tag{2.1}$$

гдеI - матрица токов в линиях,U - матрица узловых напряжений, M - матрица соединений (инцинденций).

Так как к узлам графа электрической сети еще присоединены другие поперечные ветви с ЭДС и проводимостью шунта, то задающий ток в (2.1) включает в себя также токи данных ветвей

$$I = I_{Г} - I_{H} - I_{y}$$

где $\boldsymbol{I}_{Г}$ – матрица токов генерации (ветви с ЭДС), которые определяются через мощности генерации;$\boldsymbol{I}_{н}$ – матрица токов нагрузки, которые определяются через мощности нагрузки (имеет обратное направление – от узла); $\boldsymbol{I}_{y}$ – матрица токов в проводимостях шунтов, которые зависят от проводимости шунта из матрицы M и напряжения в узле из матрицы $\mathbf{U}$ (также имеет обратное направление – от узла, так как моделирует потребление мощности).

Еслиматрицу соединений М – транспонировать, а затемумножить на матрицу узловых напряжений, то получается следующее выражение:

$$\Delta U = M^{T} U \tag{2.2}$$

где M^{T}- транспонированная матрица инцинденций, ΔU-результат произведения транспонированной матрицы инцинденций и матрицы напряжений. По закону Ома в матричной форме записи полученное выражение примет вид:

$$\Delta U = Z_B I \text{ ; или } I = \Delta U * Z_B^{-1} \qquad (2.3)$$

где $Z_в, Z_в^{-1}$ – матрица сопротивлений ветвей.Если полученное выражение подставить в (2.1), а затем в (2.2), получим:

$$M * Z_B^{-1} * M^T * U = I \qquad (2.4)$$

Введем обозначение:

$$Y = M * Z_B^{-1} * M^T$$

Где *Y*- матрица узловых проводимостей электрической сети, тогда выражение (2.4) примет вид:

$$YU = J \qquad (2.5)$$

Полученное соотношение является уравнением узловых напряжений (потенциалов) в матричной форме записи. Вычисление ее элементов осуществляется согласно следующим правилам:

1. Элементы, расположенные на главной диагонали матрицы, вычисляются как сумма проводимостей ветвей, подходящих к соответствующему узлу:

$$Y_{ij} = -\sum_{j \in \omega_i} Z_j \qquad (2.6)$$

где Y_{ij}– диагональный элемент матрицы *M*;i – номер строки, j – номер столбца,Z_j– сопротивление j-й ветви; ω– множество номеров узлов, связанных с i-*м* узлом.

2. Недиагональные элементы равны проводимостям ветвей, имя каждой из которых состоит из номеров узлов, соответствующих номеру строки и номеру столбца, на пересечении которых находится данный элемент, и взятых с противоположным знаком.

$$Y_{ij} = -\frac{1}{i * Z_{ij}} \qquad (2.7)$$

Уравнение узловых напряжений в матричной форме записи (2.5) для линейных напряженийвсетипеременноготокаможетбытьзаписановследующемвиде:

$$YU = \sqrt{3}I \quad (2.8)$$

Где гдеY–полнаякомплекснаяматрицаузловыхпроводимостейпорядка (n+1); I–вектортоковвузлах (n+1)-гопорядка; U–вектор-столбецнапряженийузлов (n+1)-гопорядка.

Уравнение (2.8) решается обычно следующим образом. Один из узлов системы принимается за базовый по напряжению и балансирующий по току. В результате отбрасывания уравненийбазового узла перейдем к следующей системе уравнений узловых напряжений:

$$Y_у(U - U_{бn}) = \sqrt{3}I \quad (2.9)$$

где$Y_у$–неполнаяматрицаузловыхпроводимостейпорядкаn; (U–$U_{бn}$) - векторразностинапряженийузлов; I–вектор-столбецтоковвузлахпорядкаn; n–единичныйвектор-столбец.

Независимыми переменными в уравнениях установившегося режима могут служить задающие токи узлов и напряжение базисного узла. В случае, когда известны мощности в узлах сети, токи можно вычислить приближенно по следующей формуле:

$$I_i = \frac{S_i}{\sqrt{3}U_{ном}} \quad (2.10)$$

где S_i – мощность i-го узла, I_i – токi-го узла, U – напряжение сети.

Если известны напряжения узлов, токи в ветвях схемы можно вычислить по выражению:

$$I = Y_B M_t (U - U_0) \quad (2.11)$$

где Y_B– матрица проводимостей ветвей; Mt –транспонированная матрица соединений в независимых узлах, которая составляется по направленному графу схемы замещения,U- матрица напряжений независимых узлов,U_0 матрица - столбец, каждый элемент которой равен напряжению балансирующего узла.

Комплексную матрицу узловых проводимостей Yиногда представляют в блочной форме, через е вещественную G и мнимую составляющие B, тогда раскрыв скобки и перенеся переменные описывающие базовый узел, выражение 2.9 можно представить в следующем виде:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{G} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_r \end{Vmatrix} = \sqrt{3} \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_a \\ \mathbf{J}_r \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -G_б U_б \\ B_б U_б \end{Vmatrix} \quad (2.12)$$

где J – ток (a – активный, r - реактивный), U – напряжение (a – активное, r – реактивное, б – базового узла),G – активная проводимость ($G_б$ – проводимость базового узла), B - реактивная проводимость ($B_б$ – проводимость базового узла).Данное выражение можно записать следующим образом:

$$G_y U_a + B_y U_r = \sqrt{3} I_a - G_б U_б$$

$$-B_y U_a + G_y U_r = \sqrt{3} I_r + B_б U_б \tag{2.13}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЗАДАЧА 2.1. Составьте уравнения узловых напряжений для электрической сети 110 кВ, схема замещения которой приведена на рис. 2.1. Схема содержит три узла, из которых узлы *1* и*2*—нагрузочные, а узел *3*—генераторный. Упрощенно полагаем, что ветви на землю отсутствуют, а сопротивления связей между узлами чисто индуктивные.Значения этих сопротивлений в относительных единицах (при базовой мощности $S_б$=50 МВА и базовом напряжении $U_б$ = 115 кВ) равны: x_{12}=0,0813, x_{13}=x_{23}=0,220.

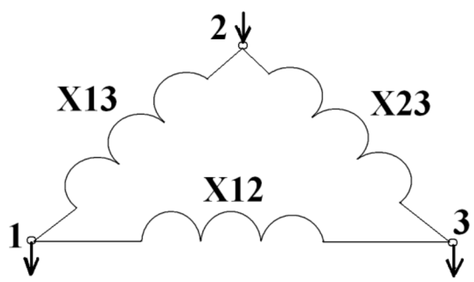

Рис. 2.1. Схема замещения сетииндуктивнымисвязямииз трех узлов

Формирование этой системы уравнений, порядок которой равен числу узлов схемы (n=3), сводится к составлению матрицы Y.В соответствии с известными правилами, элементы этой матрицы определяются так:

$$Y_{12} = Y_{21} = -jb_{12} = -jb_{21} = -\frac{1}{j0{,}0813} = j12{,}3001$$

$$Y_{13} = Y_{31} = -jb_{13} = -jb_{31} = -\frac{1}{j0{,}220} = j4{,}5455$$

$$Y_{23} = Y_{32} = -jb_{23} = -jb_{32} = -\frac{1}{j0{,}220} = j4{,}5455$$

$$Y_{11} = -jb_{11} = -Y_{12} - Y_{13} = -j(12{,}3001 + 4{,}5455) = -j16{,}8456$$

$$Y_{22} = -jb_{22} = -Y_{21} - Y_{23} = -j(12{,}3001 + 4{,}5455) = -j16{,}8456$$

$$Y_{33} = -jb_{33} = -Y_{31} - Y_{32} = -j(4{,}5455 + 4{,}5455) = -j9{,}0910$$

Таким образом выражение 2.8 – выглядит следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} -j16{,}8456 & j12{,}3001 & j4{,}5455 \\ j12{,}3001 & -j16{,}8456 & j4{,}5455 \\ j4{,}5455 & j4{,}5455 & -j9{,}0910 \end{Vmatrix} * \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Vmatrix} = \sqrt{3} \begin{Vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Vmatrix}$$

Далее необходимо задать напряжение одного из узлов (называемого базовым) и исключить уравнение балансирующего узла. Примем в качестве балансирующего и базового генераторный узел 3, тогда:

$$\begin{Vmatrix} -\mathrm{j}16{,}8456 & \mathrm{j}12{,}3001 \\ \mathrm{j}12{,}3001 & -\mathrm{j}16{,}8456 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_3 \\ \mathrm{U}_2 - \mathrm{U}_3 \end{Vmatrix} = \sqrt{3} \begin{Vmatrix} \mathrm{J}_1 \\ \mathrm{J}_2 \end{Vmatrix}$$

Упрощенно примем, что реактивные составляющие токов $J_1 = 0$, $J_2 = -1$,а $\mathrm{U}_{1\mathrm{r}} = \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_3$, $\mathrm{U}_{2\mathrm{r}} = \mathrm{U}_2 - \mathrm{U}_3$, тогда можно записать:

$$\begin{Vmatrix} -j16{,}8456 & j12{,}3001 \\ j12{,}3001 & -j16{,}8456 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \end{Vmatrix} = \sqrt{3} \begin{Vmatrix} J_{1a} \\ J_{2a} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

или в виде системы с двумя уравнениями (2.13):

$$\left.\begin{aligned} -j16{,}8456 \cdot U_{1r} + j12{,}3001 \cdot U_{2r} &= 0 \\ j12{,}3001 \cdot U_{1r} - j16{,}8456 \cdot U_{2r} &= -1{,}7 \end{aligned}\right\}$$

Определим напряжения в узлах, решив по методу Гаусса данные уравнения узловых напряжений. Коэффициент при неизвестном U_{1r} в первом уравнении системы, $=-j16{,}8456$ называется «ведущий элемент».

Первое уравнение системы разделим на ведущий элемент, т.е. на -$j16{,}8456$, тогда получим:

$$U_{1r} - 0{,}7302U_{2r} = 0 \tag{2.14}$$

Теперь, пользуясь этим уравнением, можно исключить неизвестное U_{1r}из второго уравнения системы. Для этого исключения нужно уравнение (2.14) умножить наведущий элемент второго уравнения =j12,3001:

$$j12{,}3001U_{1r} - j8{,}981U_{2r} = 0$$

и результат вычесть из второго уравнения системы:

$$j12{,}3001 \cdot U_{1r} - j12{,}3001 \cdot U_{1r} - j16{,}8456 \cdot U_{2r} + j8{,}981 = -1{,}7$$

В итоге получается одно уравнение с одним неизвестным:

$$-j7{,}8641U_{2r} = -1{,}7$$

Таким образом, система (2.13) приведена к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$U_{1r} - 0{,}7302U_{2r} = 0$$

$$-j7{,}8641U_{2r} = -1{,}7$$

Из последней системы последовательно найдем значения неизвестных:

$$U_{2r} = \frac{-1{,}7}{-j7{,}8641} = -j0{,}2162$$

$$U_{1r} = 0{,}7302U_{2r} = 0{,}7302(-j0{,}2162) = -j0{,}1579$$

$$U_{1r} = -j0{,}1579 кВ \; U_{2r} = -j0{,}2162 кВ$$

ЗАДАЧА2.2. Составьте уравнения узловых напряжений для электрической сети 110 кВ, схема замещения которой приведена на рис. 2.2. Упрощенно полагаем, что ветви на землю отсутствуют, а сопротивления связей между узлами чисто индуктивные.Значения этих сопротивлений равны: x_{12}=20 Ом, x_{13}=30 Ом, x_{23}=15 Ом, x_{14}=10 Ом, x_{24}=16 Ом.

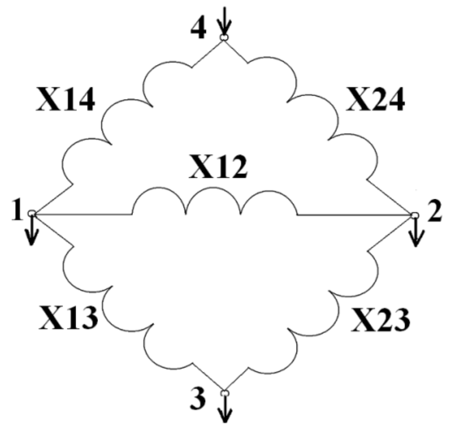

Рис.2.2. Схема замещения сети с индуктивными связями из четырехузлов

В качестве балансирующего и базового узла выбран генераторный узел №4. Матрица узловых проводимостей Y имеет третий порядок. Значения ее элементов (См) равны:

$$Y_{12} = Y_{21} = -jb_{12} = -jb_{21} = -\frac{1}{jx_{12}} = -\frac{1}{j20} = j0{,}05$$

$$Y_{13} = Y_{31} = -jb_{13} = -jb_{31} = -\frac{1}{jx_{23}} = -\frac{1}{j30} = j0{,}033$$

$$Y_{23} = Y_{32} = -jb_{23} = -jb_{32} = -\frac{1}{jx_{23}} = -\frac{1}{j15} = j0{,}0667$$

$$Y_{11} = -jb_{11} = -Y_{12} - Y_{13} + \frac{1}{jx_{14}} = -j0{,}05 - j0.033 + \frac{1}{j10} = -j0.1833$$

$$Y_{22} = -jb_{22} = -jY_{21} - jY_{23} + \frac{1}{jx_{24}} = -j0{,}05 - j0.0667 + \frac{1}{j16} = -j0.1792$$

$$Y_{33} = -jb_{33} = -jY_{31} - jY_{32} = -j0{,}0333 - j0.0667 = -j0.1$$

Узловые уравнения записываются в виде:

$$\begin{Vmatrix} -\mathrm{j}0{,}1833 & \mathrm{j}0{,}05 & \mathrm{j}0{,}0333 \\ \mathrm{j}0{,}05 & -\mathrm{j}0{,}1792 & \mathrm{j}0{,}0667 \\ \mathrm{j}0{,}0333 & \mathrm{j}0{,}0667 & -\mathrm{j}0{,}1 \end{Vmatrix} * \begin{Vmatrix} U_1 - U_4 \\ U_2 - U_4 \\ U_3 - U_4 \end{Vmatrix} = \sqrt{3} \begin{Vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Vmatrix}$$

Упрощенно примем, что реактивные составляющие токов $J_1 = 0$, $J_2 = 1$,а $U_{1r} = U_1 - U_4$, $U_{2r} = U_2 - U_4$, $U_{3r} = U_3 - U_4$, тогда можно записать:

$$\begin{Vmatrix} -j0{,}1833 & j0{,}05 & j0{,}0333 \\ j0{,}05 & -j0{,}1792 & j0{,}0667 \\ j0{,}0333 & j0{,}0667 & -j0{,}1 \end{Vmatrix} * \begin{Vmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \\ U_{3r} \end{Vmatrix} = \sqrt{3} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Система уравнений узловых напряжений примет вид:

$$\begin{cases} -j0{,}1833U_{1r} + j0{,}05U_{2r} + j0{,}0333U_{3r} = 0 \\ j0{,}05U_{1r} - j0{,}1792U_{2r} + j0{,}0667U_{3r} = 0 \\ j0{,}0333U_{1r} + j0{,}0667U_{2r} - j0{,}1U_{3r} = 1{,}732 \end{cases}$$

Последовательно исключим из системы уравнений неизвестные U_{1r}, U_{2r}.

Для этого разделим первое уравнение системы на «ведущий элемент» (коэффициент при U_{1r}), т.е. на –j0,1833:

$$U_{1r} - 0{,}2728U_{2r} - 0{,}1817U_{3r} = 0$$

Пользуясь полученным уравнением исключим U_{1r} из второго и третьего уравнения системы. Для этого последовательно умножим полученное уравнение сначала на j0,05, затем на j0.0333 и результат вычтем из исходной системы. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} U_{1r} - 0{,}2728U_{2r} - 0{,}1817U_{3r} = 0 \\ -j0{,}1656U_{2r} + j0{,}0758U_{3r} = 0 \\ j0{,}0758U_{2r} - j0{,}0939U_{3r} = 1{,}732 \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений исключим U_{2r}.

Для этого, оставив первое уравнение без изменений, второе уравнение системы разделим на «ведущий элемент» (-j0.1656), а затем умножим на «ведущий элемент» третьего уравнения и вычтем из него (аналогично предыдущей задаче). Таким образом, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} U_{1r} - 0{,}2728U_{2r} - 0{,}1817U_{3r} = 0 \\ U_{2r} - 0{,}4577U_{3r} = 0 \\ -j0{,}059U_{3r} = 1{,}732 \end{cases}$$

Аналогично предыдущей задачи найдем значения напряжений. Таким образом $U_{3r} = j29{,}356$, $U_{2r} = j13{,}436$, $U_{1r} = j8{,}999$.

ЗАДАЧА2.3. Составьте уравнения узловых напряжений для электрической сети 110 кВ, схема замещения которой приведена на рис. 2.3.Значения сопротивлениялинии равны:z_{21} = (10+j20) Ом. В качестве балансирующего и базового принят узел 2, U_2 = $U_б$ = 115 кВ. Ток нагрузки $J_1 = J_{a1} + jJ_{r1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-0.4199 + j0{,}2099)кА$

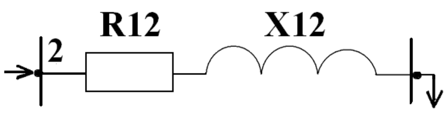

Рис. 2.3. Схема замещения с активно-индуктивной связью

РЕШЕНИЕ. Вычислим собственную проводимость узла 1:

$$Y_{11} = \frac{1}{z_{21}} = \frac{1}{10 + j20} = (0.02 - j0{,}04)См$$

Для сети из двух узлов уравнение примет вид:

$$Y_{11}U_1 = \sqrt{3}I_1 + Y_б U_б$$

Или для данной задачи:

$$(0.02 - j0{,}04)(U_{a1} + jU_{r1}) = \sqrt{3} * \frac{1}{\sqrt{3}}(-0.4199 + j0{,}2099) + (0.02 - j0{,}04) * 115$$

Согласно (2.12) полученная система действительных уравнений имеет следующий вид (указываются только численные значения реактивных значений):

$$\begin{vmatrix} 0{,}02 & -0{,}04 \\ 0{,}04 & 0{,}02 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} U_{a1} \\ U_{r1} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\begin{vmatrix} -0.4199 \\ 0.2099 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0.02*115 \\ -0.04*115 \end{vmatrix}$$

Данную матрицу, согласно (2.13) можно записать в виде:

$$\begin{cases} 0.02U_a - 0.04U_r = -3.027 \\ 0.04U_a + 0.02U_r = -4.236 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на ведущий элемент = 0,02, тогда:

$$U_a - 2U_r = -151.35$$

Затем это уравнение умножим на ведущий элемент второго уравнения = 0,04 и вычтем из второго уравнения, тогда получим:

$$-0{,}1U_r = -8{,}87$$

Таким образом, получим следующую систему:

$$\begin{cases} U_a - 2U_r = -151{,}35 \\ -0{,}1U_r = -8{,}87 \end{cases}$$

Из этой системы найдем значения неизвестных. Таким образом, U_a=26.05кВ, U_r = 88.7кВ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 2.4. Составьте уравнения узловых напряжений для электрической сети 110 кВ, схема замещения которой приведена на рис. 2.4. Упрощенно полагаем, что ветви на землю отсутствуют, а сопротивления связей между узлами чисто индуктивные.Значения этих сопротивлений равны: x_{12}=15 Ом, x_{23}=22 Ом, x_{14}=16 Ом, x_{43}=20 Ом.

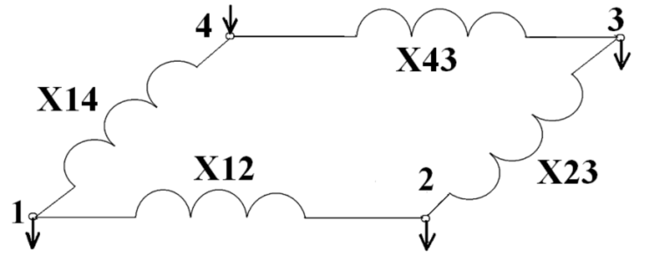

Рис.2.4. Схема замещения сети с индуктивными связями из четырехузлов

ЗАДАЧА2.5. Составьте уравнения узловых напряжений для электрической сети 110 кВ, схема замещения которой приведена на рис. 2.5. Упрощенно полагаем, что ветви на землю отсутствуют, а сопротивления связей между узлами чисто индуктивные.Значения этих сопротивлений равны: x_{12}= 27 Ом, x_{23}=22 Ом, x_{14}=19 Ом, x_{34}=21 Ом,x_{24}=24 Ом

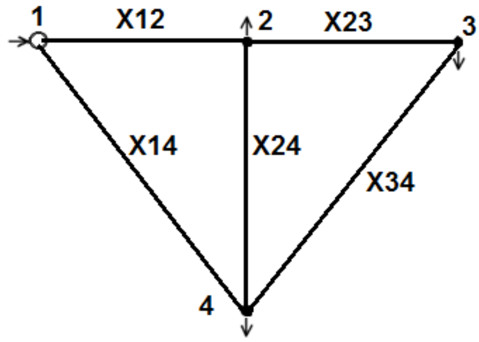

Рис.2.5. Схема замещения сети с индуктивными связями из четырехузлов

ЗАДАЧА2.6. Составьте уравнения узловых напряжений для электрической сети 110 кВ, схема замещения которой приведена на рис. 2.6. Упрощенно полагаем, что ветви на землю отсутствуют, а сопротивления связей между узлами чисто индуктивные.Значения этих сопротивлений равны: x_{13}=25 Ом, x_{12}=18 Ом, x_{23}=19 Ом

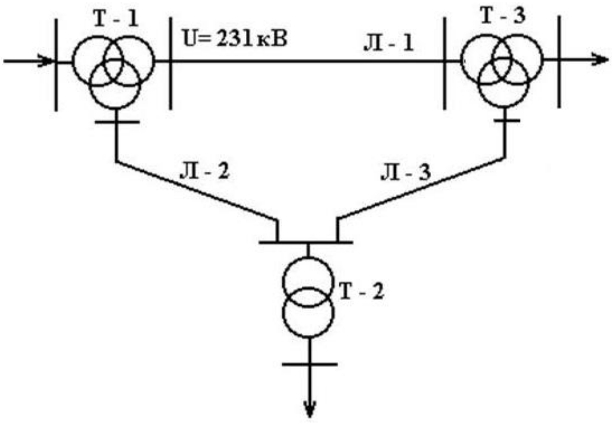

Рис.2.6. Схема замещения сети с индуктивными связями из четырехузлов

Контрольные вопросы

1.Что такое сложнозамкнутая электрическая сеть?

2.Какой метод используется для расчета установившихся режимов сложнозамкнутых сетей?

3.Что такое балансирующий узел?

4.Что такое базисный узел по напряжению?

5.Что такое взаимная проводимость?

6.Как определяется собственная проводимость узла?

7.Запишите в матричном виде систему узловых напряжений.

8.Запишите систему уравнений узловых напряжений для сети, состоящей из трех узлов.