ЛЕКЦИЯ 2. Основные статистические характеристики показателей надёжности ЭТО

Математический аппарат теории надёжности основывается главным образом на теоретико-вероятностных методах, поскольку сам процесс появления отказов в технике по своей физической природе носит вероятностный характер.

В частности, для изучения теории надёжности прежде всего необходимо знать основные положения теории вероятностей: понятия о случайных событиях и случайных величинах и их характеристиках, законы распределения случайных величин, действия над случайными величинами. При экспериментальном определении численных характеристик надёжности необходимо знать правила статистической обработки опытных данных, т.е. владеть основами математической статистики.

Вероятностные методы исследования случайных явлений являются эффективным аппаратом научного изучения случайных процессов в вопросах надёжности. Они позволяют не только количественно оценить фактический или ожидаемый уровень надёжности, но и облегчают задачу разработки научно обоснованных мероприятий повышения надёжности.

В связи с выше изложенным, авторы считают необходимым привести наиболее часто используемые в теории надёжности параметрические семейства распределений случайной величины ξ, полагая, что читатель имеет определённый уровень подготовки в области математического анализа и математической статистики.

Функция

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ при } t \geq 0$$

задает *экспоненциальное* (показательное) распределение. Экспоненциальным законом распределения можно аппроксимировать время безотказной работы большого числа элементов. В первую очередь это относиться к элементам радиоэлектронной аппаратуры, а также к машинам, эксплуатируемым в период после окончания приработки до существенного проявления постепенных отказов.

Это распределение имеет один параметр $\lambda = \frac{1}{T_1}$, где T_1 - средняя наработка элемента до отказа. Таким образом, параметр λ характеризует число отказов элемента в единицу времени и является интенсивностью отказов. Плотность экспоненциального распределения задается как:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Функция надёжности

$$P(t) = e^{-\lambda t}$$

определяет вероятность безотказной работы за время t(рис.2).

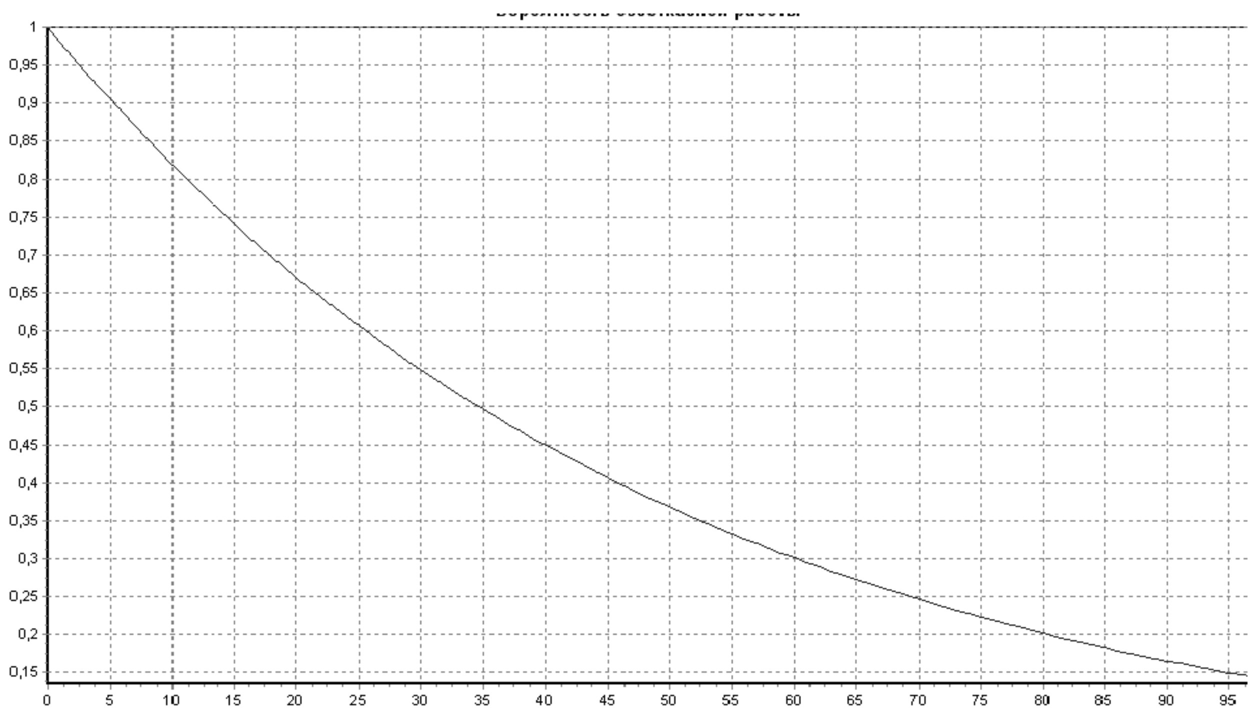


Рис.2. Вероятность безотказной работы при экспоненциальном законе распределения времени до отказа

В данном случае интенсивность отказов есть величина постоянная $\lambda(t) = \lambda = const$. Функция ресурса для экспоненциального распределения является линейной $\Lambda(t) = \lambda t$. Величина γ-процентного ресурса определяется по формуле

$$t_\gamma = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\gamma}{100}.$$

Экспоненциальное распределение выделяется среди других распределений свойством «отсутствия памяти». Это означает, что объект, проработавший время *t*, имеет такое же распределение, что и новый, только что начавший работу. Данное свойство как бы исключает износ и старение объекта.

Числовые характеристики экспоненциального распределения выражаются через его параметр: математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{\lambda}$, дисперсия $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$. На основании формул (11) - (18) между показателями надёжности невосстанавливаемых систем существуют следующие зависимости:

$$P(t)=e^{-\lambda t},\ \ T=\frac{1}{\lambda},\ \ f(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

Для характеристик постепенных отказов обычно используют другие законы распределения.

Нормальное распределение (распределение Гаусса) определяется плотностью

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<t<+\infty$$

и зависит от двух параметров m и σ, которые являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением времени безотказной работы элемента. График плотности нормального распределения (кривая Гаусса) изображена на рис.3.

Согласно закону больших чисел, распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение его случайной величины оказывают влияние многие примерно равнозначные факторы. Нормальному распределению подчиняются ошибки измерений, дальность полета снарядов и т.п. При большом времени работы элемента и наличии восстановления среднее число отказов имеет асимптотически нормальное распределение.

Для нормального распределения функция надёжности вычисляется по формуле:

$$P(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 0{,}5 - \hat{O}_0\left(\frac{t-m}{\sigma}\right),$$

где $\hat{O}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа, значения которой табулированы.

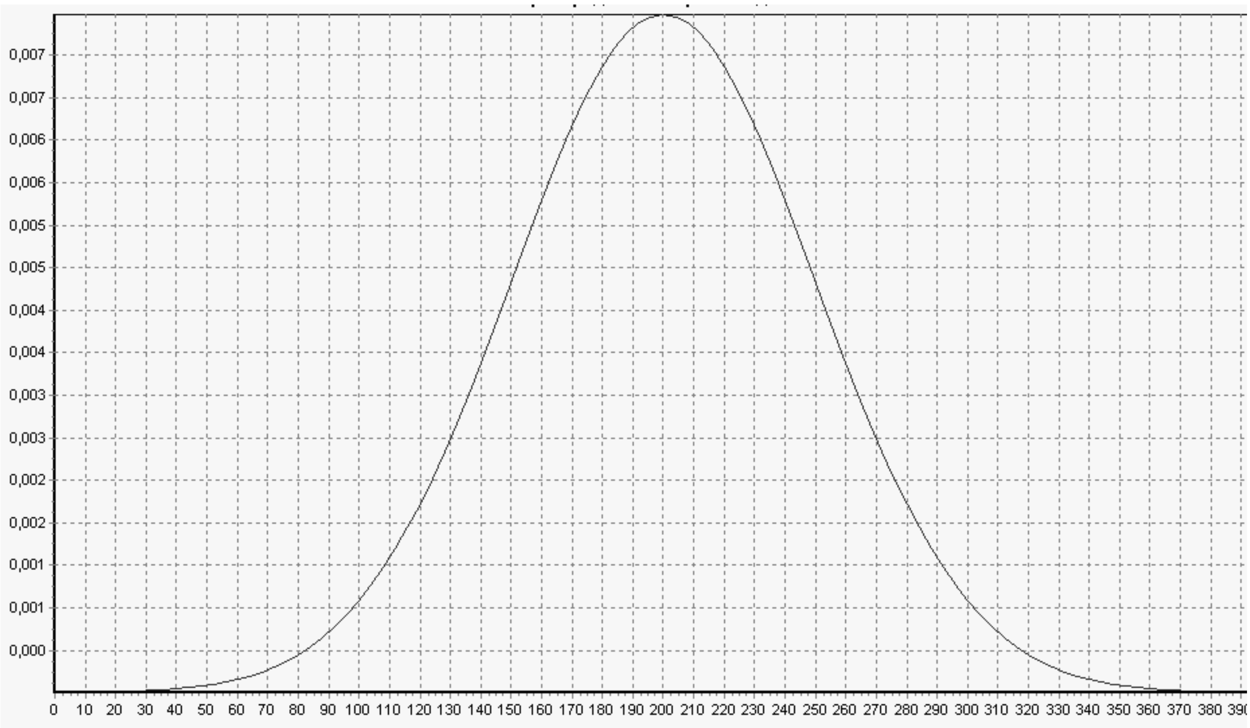


Рис.3. Плотность нормального распределения

Отметим важное свойство нормального распределения: сумма независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение, также распределена по нормальному закону. При этом параметры суммы выражаются через параметры слагаемых, а именно: математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

Усеченное нормальное распределение получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины на промежуток $[0,+\infty)$. Плотность распределения определяется также, как для нормального распределения, но с коэффициентом пропорциональности c:

$$f(t)=\frac{c}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

Усеченное нормальное распределение зависит от двух параметров m_0 и σ_0, где m_0 - значение случайной величины, соответствующее максимальному значению $f(t)$ и называется модой. Коэффициент c определяется из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(t)dt=1$$

откуда

$$c=\frac{1}{0{,}5+\hat{O}_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение усеченного нормального распределения определяются через параметры m_0 и σ_0 по формулам:

$$m=m_0+k\sigma_0,\quad \sigma=\sigma_0\sqrt{1+k\frac{m_0}{\sigma_0}-k^2},$$

где $k=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}$.

В *логарифмически нормальном* распределении логарифм случайной величины подчиняется нормальному закону с плотностью:

$$f(t)=\frac{1}{st\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2s^2}},$$

где μ и s - параметры распределения. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение определяются в соответствии с формулами

$$m=\sqrt{e^{2\mu+s^2}},\ \sigma=\sqrt{e^{2\mu+s^2}\left(e^{s^2}-1\right)}.$$

Логарифмически нормальное распределение применяют, например, для описания наработки подшипников качения. Оно удобно для описания случайных величин, представляющих собой произведение достаточно большого числа случайных величин, подобно тому, как нормальное распределение описывает сумму большого числа случайных величин.

Распределение *Вейбулла* является достаточно универсальным, благодаря возможности варьирования двух его параметров. Оно характеризуется плотностью распределения вероятностей:

$$f(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

с параметром формы α и параметром масштаба β. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение выражаются через эти параметры следующим образом:

$$m = \beta \tilde{A}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),\ \sigma = \beta\sqrt{\tilde{A}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \tilde{A}^{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\ ,$$

где $\tilde{A}(t) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ - гамма-функция. Универсальность распределения Вейбулла объясняется следующим: при $\alpha = 1$ распределение превращается в экспоненциальное; при $\alpha < 1$ функция плотности и интенсивности отказов убывающие; при $\alpha > 1$ интенсивность отказов возрастающая; при $\alpha = 2$ функция $\lambda(t)$ линейная и распределение Вейбулла превращается в распределение Рэлея с плотностью:

$$f(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^{2}}$$

при $\alpha = 3{,}3$ распределение Вейбулла близко к нормальному. наряду с логарифмически нормальным распределением, оно хорошо описывает наработку деталей по усталостным разрушениям, наработку до отказа подшипников, а также используется для оценки надёжности деталей и узлов машин, в частности автомобилей, подъемно-транспортных и других машин.

Зависимости между показателями надёжности в случае распределения Вейбулла имеют вид:

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}, \; T_1 = \beta\tilde{A}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right), \; \lambda = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}t^{\alpha-1}.$$

На рис.4 представлен график интенсивности отказов для параметров распределения Вейбулла: $\alpha = 3$ и $\beta = 200$ час.

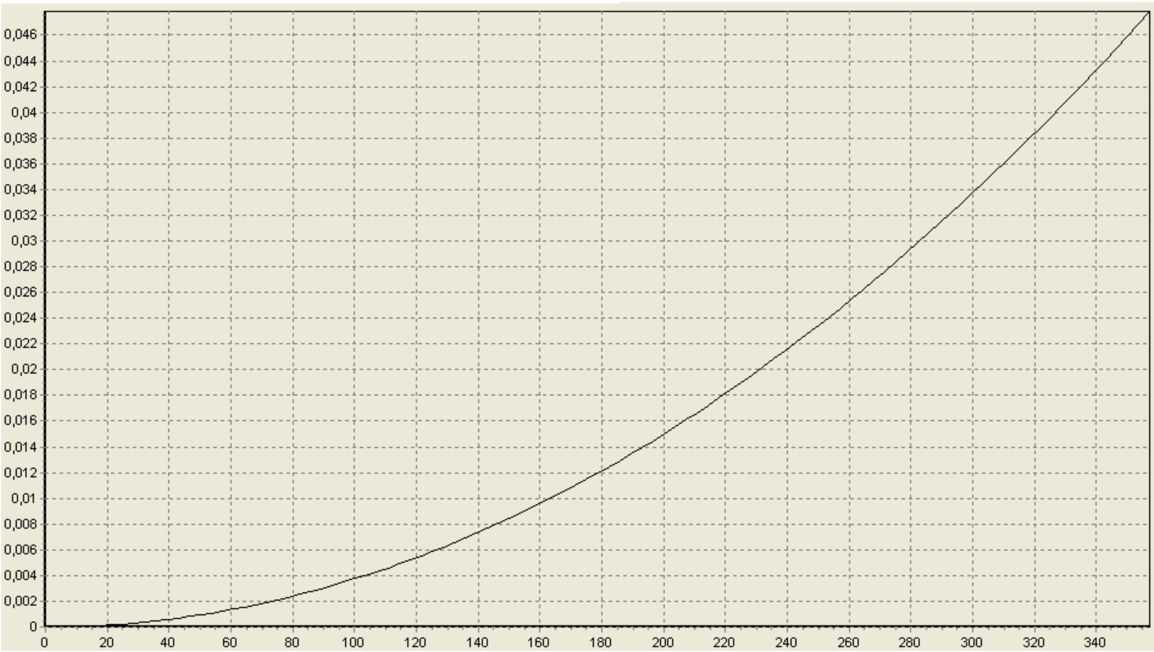


Рис.4. Интенсивность отказов для распределения Вейбулла

Гамма-распределение имеет плотность

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\tilde{A}(\alpha)}e^{-\frac{t}{\beta}}$$

с параметрами α и β. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение связаны с этими параметрами соотношениями:

$$m = \alpha\beta, \; \sigma = \sqrt{\alpha}\beta.$$

Вероятность безотказной работы элемента, имеющего гамма-распределение, выражается через интеграл

$$P(t) = \int_{t}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\tilde{A}(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx.$$

Параметр α, характеризующий асимметрию гамма-распределения, определяет вид характеристик надёжности. При $\alpha > 1$ интенсивность отказа возрастает, при $\alpha < 1$ убывает, а при $\alpha = 1$ становиться постоянной, т.е. гамма-распределение превращается в экспоненциальное.

При целом α гамма-распределение называется распределением *Эрланга* порядка α . Сумма α случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметром λ , имеет распределение Эрланга с параметрами α и $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$. Вероятность безотказной работы элемента, имеющего распределение Эрланга, равна

$$P(t) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{i!\beta^i} e^{-\frac{t}{\beta}} .$$

Зависимости между показателями надёжности в случае гамма-распределения имеют вид:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{\beta}} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{\beta^i i!}, \quad T = \alpha\beta, \quad \lambda = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \tilde{A}(\alpha) \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{\beta^i i!}} .$$

Смесь распределений определяется как линейная комбинация других распределений, например распределение с плотностью

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} ,$$

где $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, образует смесь n экспоненциальных распределений. Такое распределение называется гиперэкспоненциальным.

Смесь гамма-распределений

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{t^{\alpha_i - 1}}{\beta_i^{\alpha_i} \tilde{A}(\alpha_i)} e^{-\frac{t}{\beta_i}}$$

при условии $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ образует плотность обобщённого гамма-распределения и т.п.

Пример 2.1. Нерезервированная система состоит из 5 элементов, имеющих различные законы распределения времени до отказа. Виды законов распределений и их параметры приведены в табл. 3.

Таблица 3. Законы распределения времени до отказа

Номер элемента	1	2	3	4	5
Закон распределения времени до отказа	W(2;1800)	Г(7;300)	R(8×10^{-8})	Exp(0.002)	TN(2000;90)

Примечание. В табл.3 приняты следующие обозначения законов распределения: W - Вейбулла, Г - гамма, R - Рэлея, Exp - экспоненциальный, TN - усечённый нормальный, N - нормальный. В скобках указаны параметры распределений.

Определить показатели надёжности каждого элемента: вероятность безотказной работы, среднее время безотказной работы, интенсивность отказа, плотность распределения времени безотказной работы. Для показателей, зависящих от времени, получить решение в виде графиков.

Решение. Вычислим начальные моменты распределений: математические ожидания и средние квадратические отклонения, воспользовавшись формулами, приведенными в табл. 4.

Таблица 4. Связь параметров распределений с первыми двумя моментами

Распределение	m	σ
Экспоненциальное $Exp(\lambda)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
Равномерное $U(a,b), a \geq 0$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Гамма $\tilde{A}(\alpha,\beta)$	$\alpha\beta$	$\sqrt{\alpha}\,\beta$
Усечённое нормальное $TN(m_0,\sigma_0)$	$m_0 + k\sigma_0$	$\sigma_0\sqrt{1+k\dfrac{m_0}{\sigma_0}-k^2}$, $k = \dfrac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}$, $c = \dfrac{1}{0.5+\hat{O}_0\left(\dfrac{m_0}{\sigma_0}\right)}$
Рэлея $R(\lambda)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{4\lambda}}$	$\sqrt{\dfrac{4-\pi}{4\lambda}}$

Вейбулла $W(\alpha,\beta)$	$\beta\tilde{A}(1+{}^{1}\!/\!_{\alpha})$	$\beta\sqrt{\tilde{A}\left(1+{}^{2}\!/\!_{\alpha}\right)-\tilde{A}^{2}\left(1+{}^{1}\!/\!_{\alpha}\right)}$
Нормальное $N(m,\sigma)$ $m>3\sigma$	m	σ

Примечание. В таблице введены обозначения: $\hat{O}_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функция Лапласа; $\tilde{A}(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ - гамма-функция. Вычисление значений этих функций наиболее простым способом является обращение к системе Microsoft Exel.

Определим математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени до отказа элементов.

Элемент 1.

$m=1800\times\tilde{A}(1.5)=1595\text{÷àñ},\quad \sigma=1800\times\sqrt{\tilde{A}(2)-\tilde{A}^2(1{,}5)}=571.564\text{÷àñ}.$

Элемент2.

$m=7\times300=2100\text{÷àñ},\quad \sigma=\sqrt{7}\times300=793.725\text{÷àñ}.$

Элемент 3.

$m=\sqrt{\frac{\pi}{4\times8\times10^{-8}}}=3133\text{÷àñ},\quad \sigma=\sqrt{\frac{4-\pi}{4\times8\times10^{-8}}}=1638\text{÷àñ}.$

Элемент 4.

$m=\frac{1}{0.0002}=5000\text{÷àñ},\quad \sigma=m=5000\text{÷àñ}.$

Элемент 5.

$$k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(0.5+\hat{O}_0\left(\frac{2000}{900}\right)\right)}e^{-\frac{2000^2}{2\times900^2}}=0.0342,$$

$$m=2000+0.0342\times900=2031\text{÷àñ},\quad \sigma=900\sqrt{1+0{,}0342\frac{2000}{900}-0{,}0342^2}=933.088\text{÷àñ}.$$

Решение поставленной задачи с использованием пакета программ в среде Mathcad представлено на рис.5

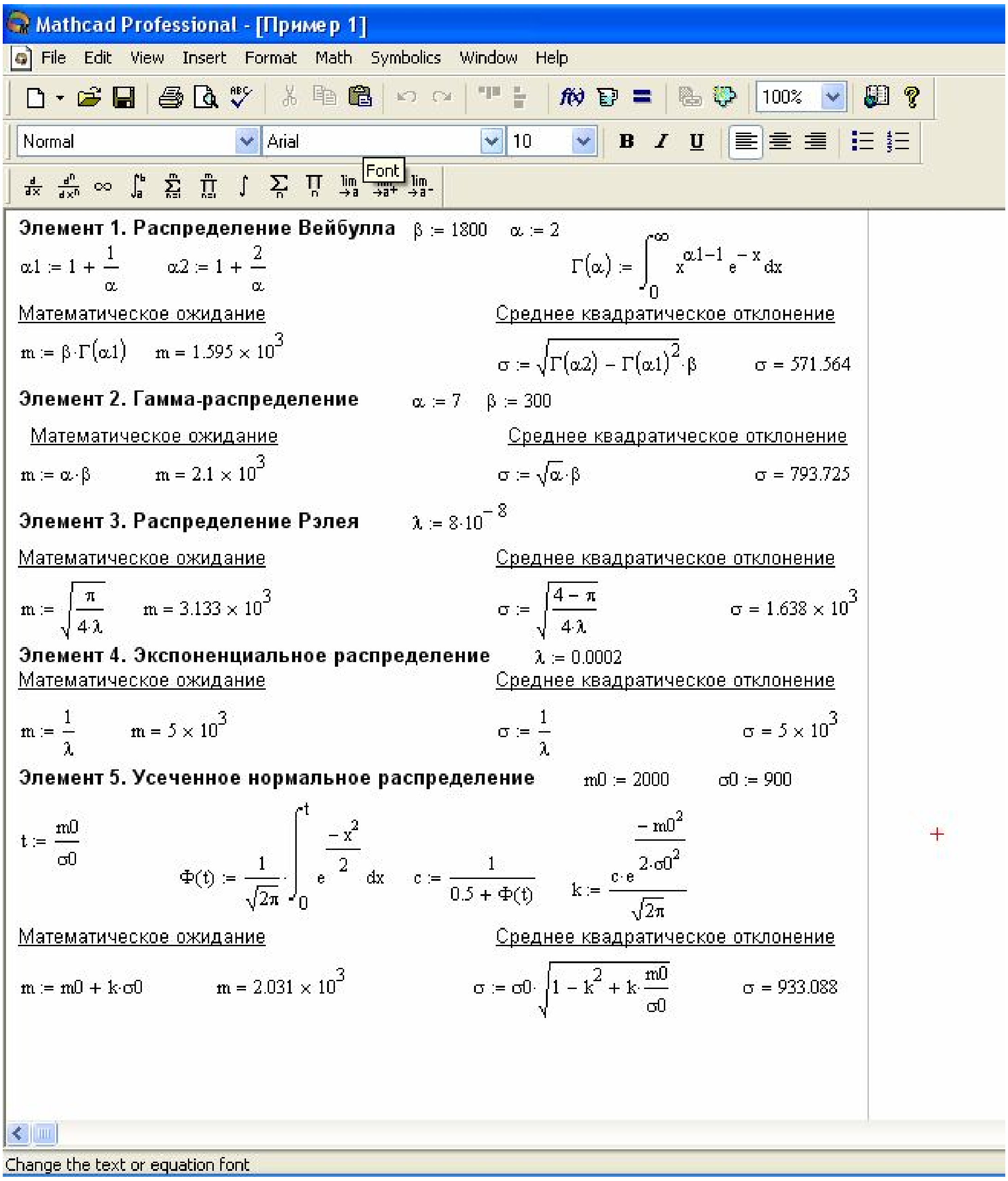


Рис.5. Решение примера №1 в среде Mathcad

Вычисление вероятности безотказной работы и плотности распределения времени до отказа элементов произведем в соответствии с аналитическими выражениями представленными в табл.5.

Таблица 5. Вероятность безотказной работы и плотность распределения времени до отказа

Распределение	$f(t)$	$P(t)$
Экспоненциальное $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$
Равномерное $U(a,b), a \geq 0$	$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \leq t \leq b; \\ 0, \quad t < a, t > b \end{cases}$	$\begin{cases} 1, t < a; \\ \dfrac{b-t}{b-a}, a \leq t \leq b; \\ 0, t > b \end{cases}$
Гамма $\tilde{A}(\alpha,\beta)$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\tilde{A}(\alpha)} e^{-\frac{t}{\beta}}$	$1 - I\left(\alpha, \dfrac{t}{\beta}\right)$
Усечённое нормальное $TN(m_0,\sigma_0)$, $m \geq 1.33\sigma$	$\dfrac{C}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}$, $C = \dfrac{1}{0.5} + \hat{O}_0\left(\dfrac{m_0}{\sigma_0}\right)$	$C\left(0.5 - \hat{O}_0\left(\dfrac{t-m_0}{\sigma_0}\right)\right)$
Рэлея $R(\lambda)$	$2\lambda t e^{-\lambda t^2}$	$e^{-\lambda t^2}$
Вейбулла $W(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$	$e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$
Нормальное $N(m,\sigma)$ $m > 3\sigma$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$0.5 - \hat{O}_0\left(\dfrac{t-m}{\sigma}\right)$

Примечание. В гамма-распределение $I(\alpha,t) = \dfrac{1}{\tilde{A}(\alpha)}\int\limits_0^t x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ есть неполная гамма-функция.

Равномерное и нормальное распределения имеют ограничения на параметры для того, чтобы их можно было использовать для решения задач надёжности в неотрицательной временной области.

Элемент 1.

$$P_1(t) = e^{-\left(\frac{t}{1800}\right)^2}, \; f_1(t) = \frac{2t}{1800^2} e^{-\left(\frac{t}{1800}\right)^2}.$$

Элемент 2.

$$P_2(t) = 1 - I\left(7, \frac{t}{300}\right),\ f_2(t) = \frac{t^6}{300^7\,\tilde{A}(7)} e^{-\frac{t}{300}}.$$

Элемент 3.

$$P_3(t) = e^{-8\times 10^{-8} t^2},\ f_3(t) = 2\times 8\times 10^{-8} t e^{-8\times 10^{-8} t^2}.$$

Элемент 4.

$$P_4(t) = e^{-0.0002t},\ f_4(t) = 0.0002 e^{-0.0002t}.$$

Элемент 5.

$$P_5(t) = \frac{c}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx = \frac{0.5 - \hat{O}_0\left(\frac{t-m_0}{\sigma_0}\right)}{0.5 + \hat{O}_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)} = \frac{0.5 - \hat{O}_0\left(\frac{t-2000}{900}\right)}{0.5 + \hat{O}_0\left(\frac{2000}{900}\right)}.$$

$$f_5(t) = \frac{1}{900\sqrt{2\pi}\left(0.5 + \hat{O}_0\left(\frac{2000}{900}\right)\right)} e^{-\frac{(t-2000)^2}{2\times 900^2}}$$

Порядок определения вероятности безотказной работы и плотности распределения с использованием пакета программ представлены на рис. 6. Необходимо отметить, что в Mathcad имеются встроенные функции для оценки 17 видов распределений случайных величин. Эти функции рассчитывают плотность вероятности, функцию распределения, квантиль вероятности, генерируют вектор случайных чисел, распределённых по любому из 17 видов распределений. Несмотря на это решение данного примера показано с использованием формульного описания величин, а не операторов, позволяющих сразу получить искомый результат.

Табулируя эти функции от 0 до 2000 часов с шагом 100 часов, получим графическое изображение вероятностей безотказной работы. и их плотностей распределения представленных на рис. 7.Номера графиков соответствуют номерам элементов.

Из графиков видно различное поведение вероятностей безотказной работы элементов. Скорость убывания вероятностей зависит от вида и параметров закона распределения. В нашем случае медленнее всего убывает

$P(t)$ для экспоненциального распределения и распределения Рэлея, т.е. при большом времени работы наиболее надёжными оказываются третий и четвертый элементы системы.

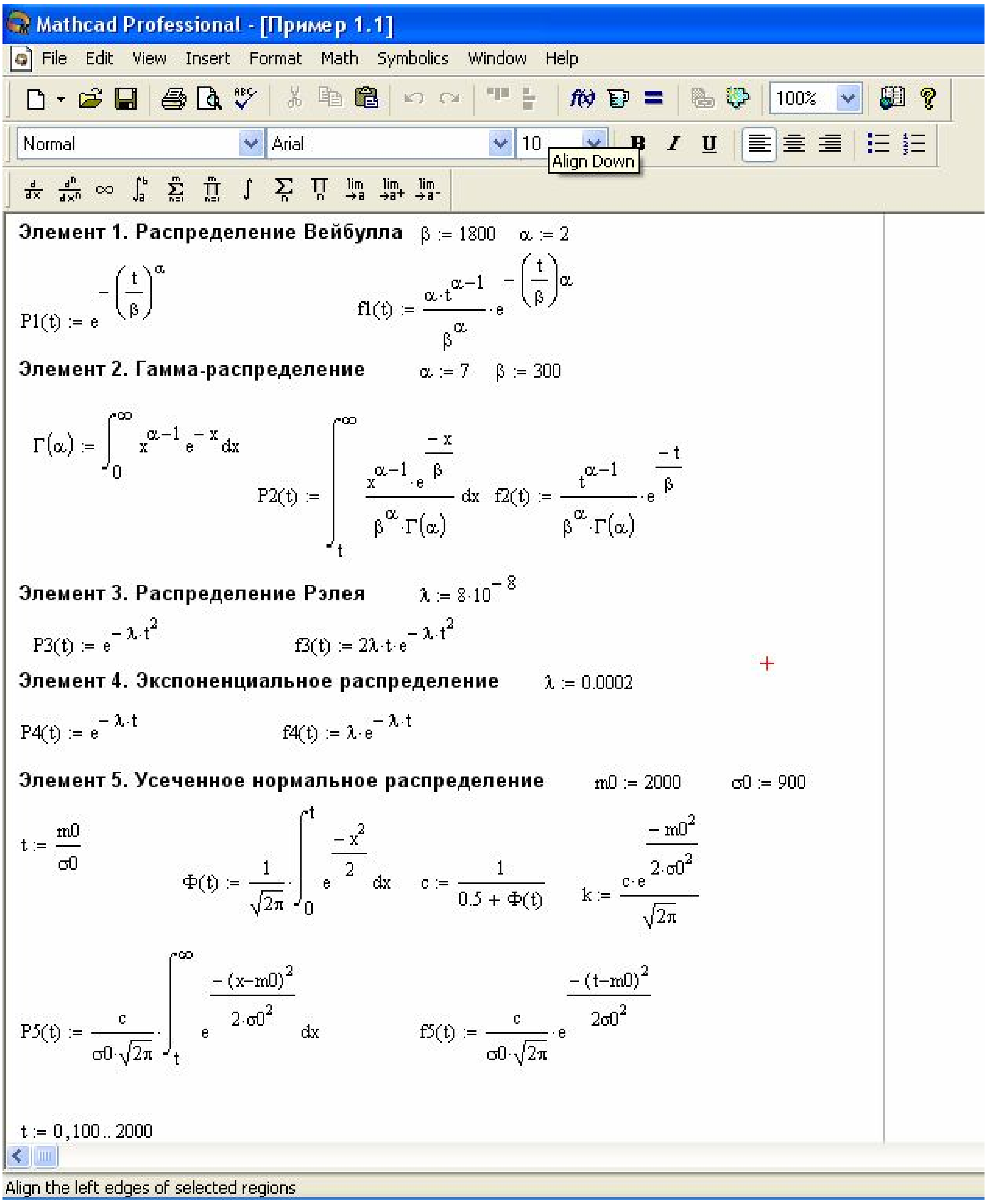
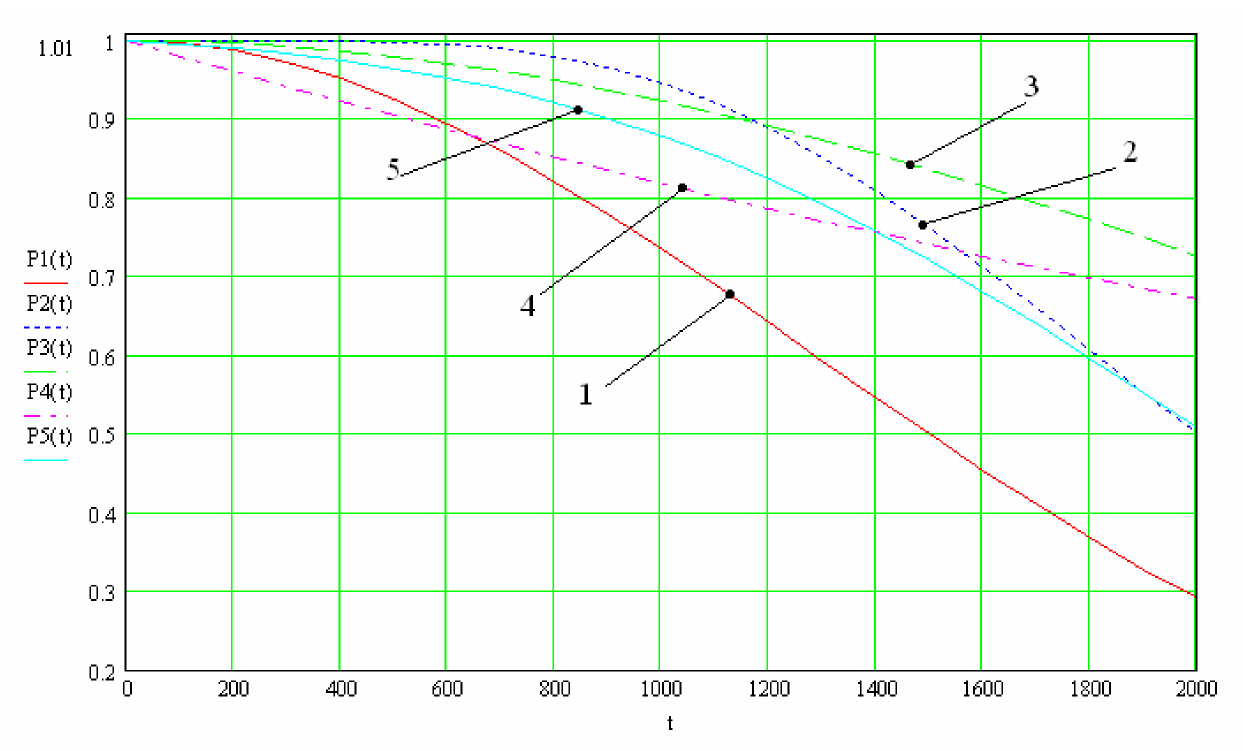


Рис.6. Вычисление вероятности безотказной работы и плотности распределения

Вероятность безотказной работы всей системы в данном случае можно вычислить как произведение вероятностей безотказной работы её элементов

$$P_C(t) = P_1(t)P_2(t)P_3(t)P_4(t)P_5(t)$$



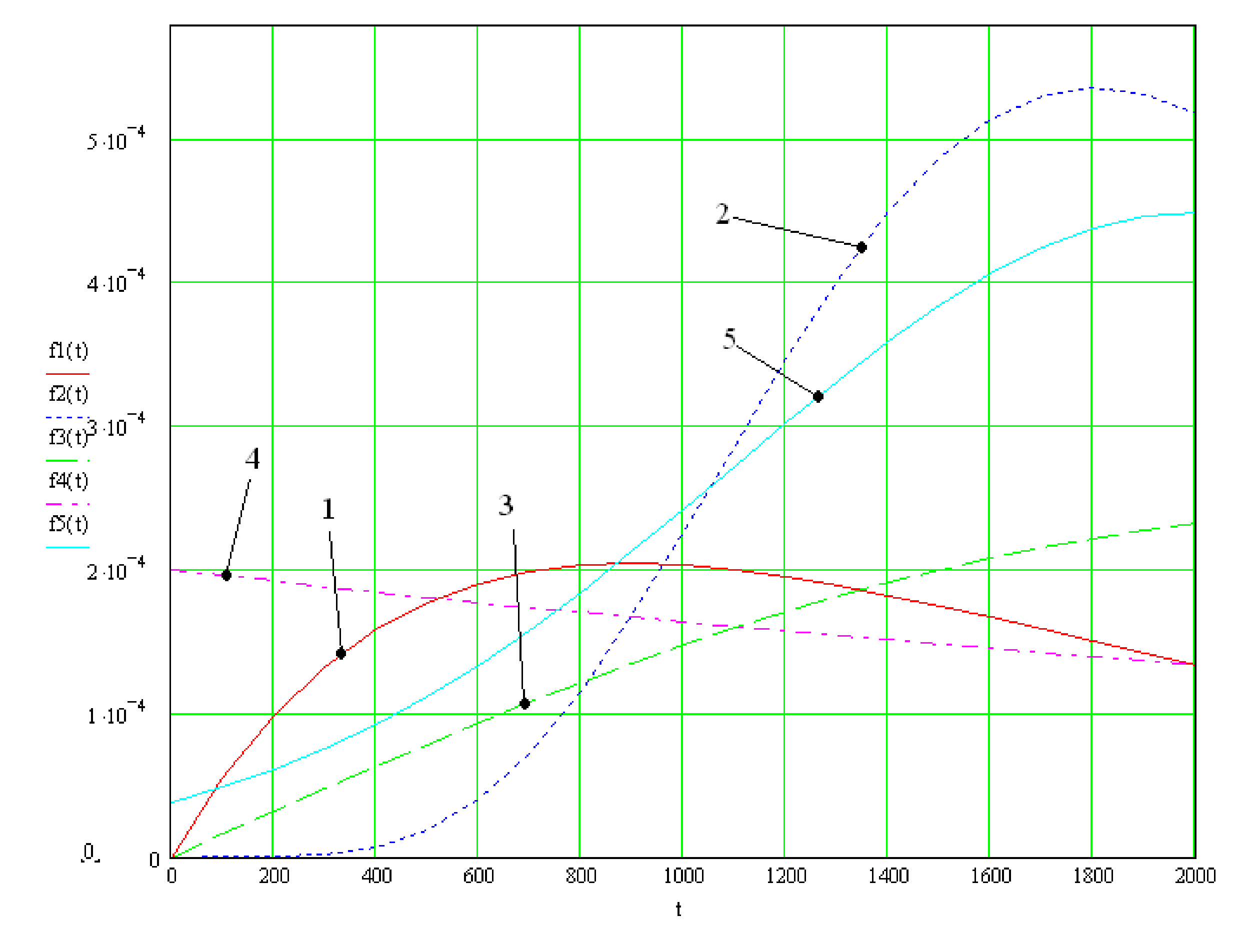


Рис.7. Вероятности безотказной работы и плотности распределений элементов

На рис. 8 представлены результаты определения вероятности безотказной работы всей системы.

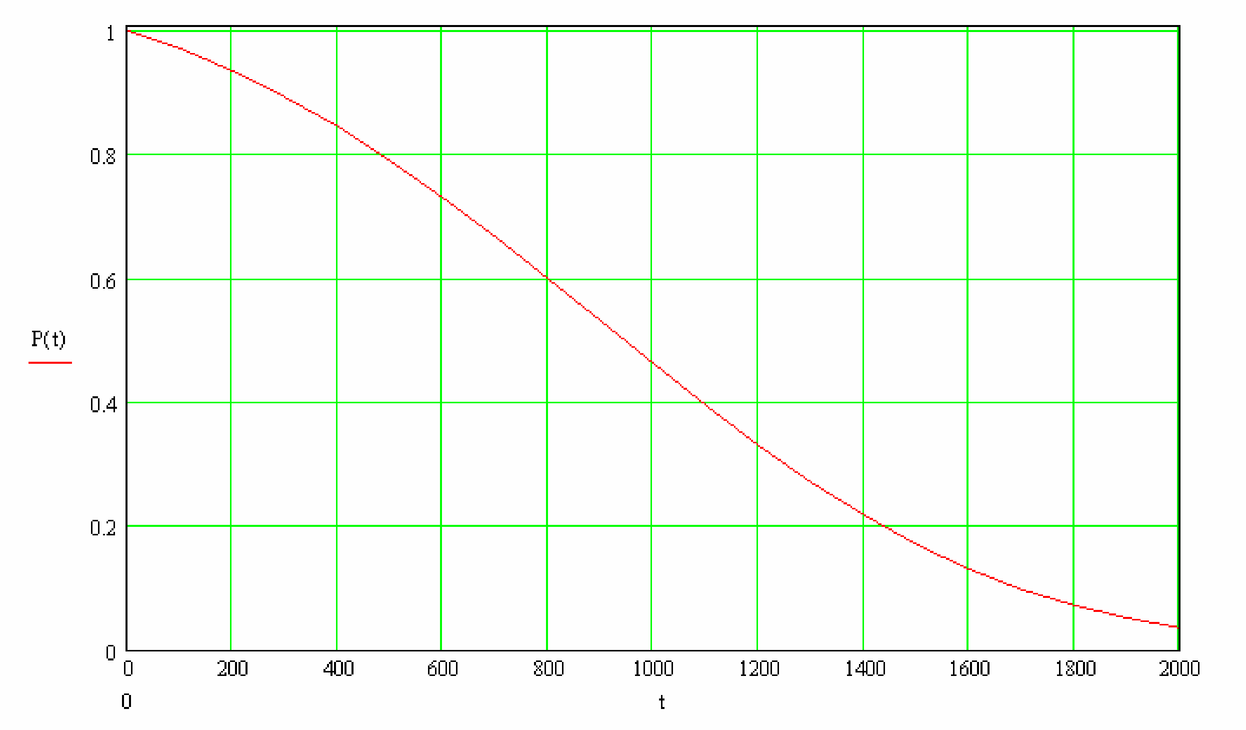


Рис.8. Вероятность безотказной работы системы