Лекция №4. Законы распределения отказов ЭТО

Случайной называется величина, которая в результате испытаний может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными. *Непрерывными* случайными величинами являются: время безотказной работы элементов, устройств, агрегатов, систем; время вынужденного простоя оборудования из-за отказов; уровень того или иного технического параметра и т.д. *Дискретными* случайными величинами являются: число неисправных элементов, устройств, агрегатов из общего числа находящихся в эксплуатации; число дефектных изделий в какой-либо партии продукции; количество повреждений элементов какого-либо оборудования в единицу времени и т.д.

Из-за невозможности указать, какое конкретное значение примет случайная величина в данном эксперименте, для ее характеристики применяются вероятности того, что она будет равна заданному значению или окажется в указанных пределах возможного значения. При этом используются понятия *числовых характеристик* распределений случайных величин.

Основные *числовые характеристики* случайных величин – *математическое ожидание* (*среднее значение*), *дисперсия*, *среднее квадратическое отклонение*, *мода*, *медиана*, *коэффициент вариации*.

Если задан ряд распределений вероятностей P_i для значений x_i случайной величины X, то математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i$$

Показателями, характеризующими степень рассеяния случайной величины около своего математического ожидания, являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X) = M(X - M(X))^2,\ D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Для более полного описания случайных величин вводятся понятия функции распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$. *Функция распределения* определяет для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Плотность распределения непрерывной случайной величины – первая производная от функции распределения:

$$f(x) = F'(x),\ F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины определятся как

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,\ D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx,$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - (M(x))^2.$$

Пример. Энергосистема ограничивает промышленное предприятие в потреблении электрической мощности. При этом в течение года возможны дефициты в 5, 10 и 15 МВт с вероятностями соответственно 0,001, 0,0004 и 0,0002. Определить математическое ожидание недоотпуска электроэнергии промышленному предприятию за год.

Решение.

$$M[P] = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = 0{,}001 \cdot 5 + 0{,}0004 \cdot 10 + 0{,}0002 \cdot 15 = 0{,}012 \text{ МВт}.$$

В году 8760 часов. $M[W] = 8760 \cdot M[P] = 8760 \cdot 0{,}012 = 105{,}12$ МВт · ч.

Для описания поведения систем и их элементов с точки зрения надежности используются параметрические семейства распределения наработки, аналитическое описание которых приведено в таблице 1. При надлежащем выборе параметров модели безотказности на основе любого из описанных распределений интенсивность отказов может быть как возрастающей, так и убывающей. Распределение Эрланга, усеченная нормальная функция распределения, гамма-распределение, а также распределение Вейбулла-Гнеденко описывают характеристики элементов системы с возрастающей функцией интенсивности отказов.

Экспоненциальное распределение

- характеризуется тем, что наработка последовательной системы, состоящей из независимых элементов с экспоненциально распределенными наработками и параметрами λ_i, также имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Этому закону подчиняются отказы некоторых узлов электрических машин малой мощности (например, коллекторный узел), а также отказы некоторых типов машин малой мощности. Этот закон широко используется для описания надежности пускорегулирующей аппаратуры, элементов радиоэлектроники (диоды, конденсаторы).

Средняя наработка и дисперсия наработки такой системы равны

$$T_{cp}=\int_0^{\infty}P(t)dt=\int_0^{\infty}exp(-\lambda t)dt=\frac{1}{\lambda}; \qquad (1)$$

$$D_{\tau}=M\left[(t-\tau)^2\right]=\int_0^{\infty}t\cdot\lambda\cdot\exp(-\lambda t)=\frac{1}{\lambda^2}. \qquad (2)$$

Поскольку интенсивность отказов такой системы постоянна, то считается, что экспоненциальное распределение описывает и "стареющие" и "молодеющие" системы. Очевидно, что описание поведения реальных систем и их элементов на основе экспоненциального распределения наработки является хотя идеализированным, но удобным с точки зрения упрощения расчетов показателей надежности на нормальном этапе эксплуатации.

Экспоненциальное распределение является частным случаем некоторых двухпараметрических распределений, к которым относятся распределения Вейбулла-Гнеденко и Эрланга.

Таблица 1 - Параметрические модели безотказности элементов технических систем

	Наименование	$P(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
1.	Модель с постоянной интенсивностью отказов	$P(t)=\exp(-\lambda t)$	$f(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$;	$\lambda = const$
2.	Модель, основанная на распределении Вейбулла-Гнеденко	$P(t)=\exp(-(t/\theta)^{\beta})$	$f(t)=\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right]$	$\lambda(t)=(t/\theta)^{\beta-1}\beta/\theta$
3.	Модель, основанная на распределении Эрланга	$P(t)=\exp(-\alpha t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha t)^k}{k!}$	$f(t)=\alpha\frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\alpha t)$	$\lambda(t)=\frac{\alpha(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!\sum_{k-0}^{n-1}\frac{(\alpha t)^k}{k!}}$
4.	Модель на основе усеченного слева нормального распределения	$P(t)=a\left[1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]$, $a=\left[1-\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1}$	$f(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\lambda(t)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\left[1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]}$
5.	Модель на основе гамма-распределения	$P(t)=\left[1-\frac{\Gamma(t,\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]$	$f(t)=\frac{\alpha(\alpha t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\exp(-\alpha t)$	$\lambda(t)=\frac{\alpha(\alpha t)^{\beta-1}\exp(-\alpha t)}{\Gamma(\beta)-\Gamma(t,\alpha,\beta)}$,
6.	Модель на основе логарифмически нормального распределения	$P(t)=\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\right]$	$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\lambda(t)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)}$

Распределение Вейбулла-Гнеденко

также как и экспоненциальное распределение обладает свойством сохранения формы распределения наработки для последовательных систем, если параметры формы распределения элементов системы одинаковы. Графики функций $P(t), F(t), f(t)$ и $\lambda(t)$ для различных значений показателей формы распределения приведены на рисунке 1. Широко используется при оценке надежности механических, электромеханических узлов и элементов радиоэлектронной аппаратуры. В электрических машинах этим законом описывается надежность подшипниковых узлов, а также распределение пробивного напряжения в обмотках асинхронных двигателей.

Распределение Вейбулла двухпараметрическое, включающее θ параметр, определяющий масштаб, и β – параметр асимметрии. Характеристики закона видоизменяются в зависимости от параметра β. При β = 1 распределение Вейбулла становится экспоненциальным (λ=const), при β>1. интенсивность отказов растет, при β<1 интенсивность отказов падает по закону, близкому к гиперболическому.

Вероятность безотказной работы параллельной системы, состоящей из элементов, модели поведения которых основаны на использовании распределения Вейбулла-Гнеденко, равна

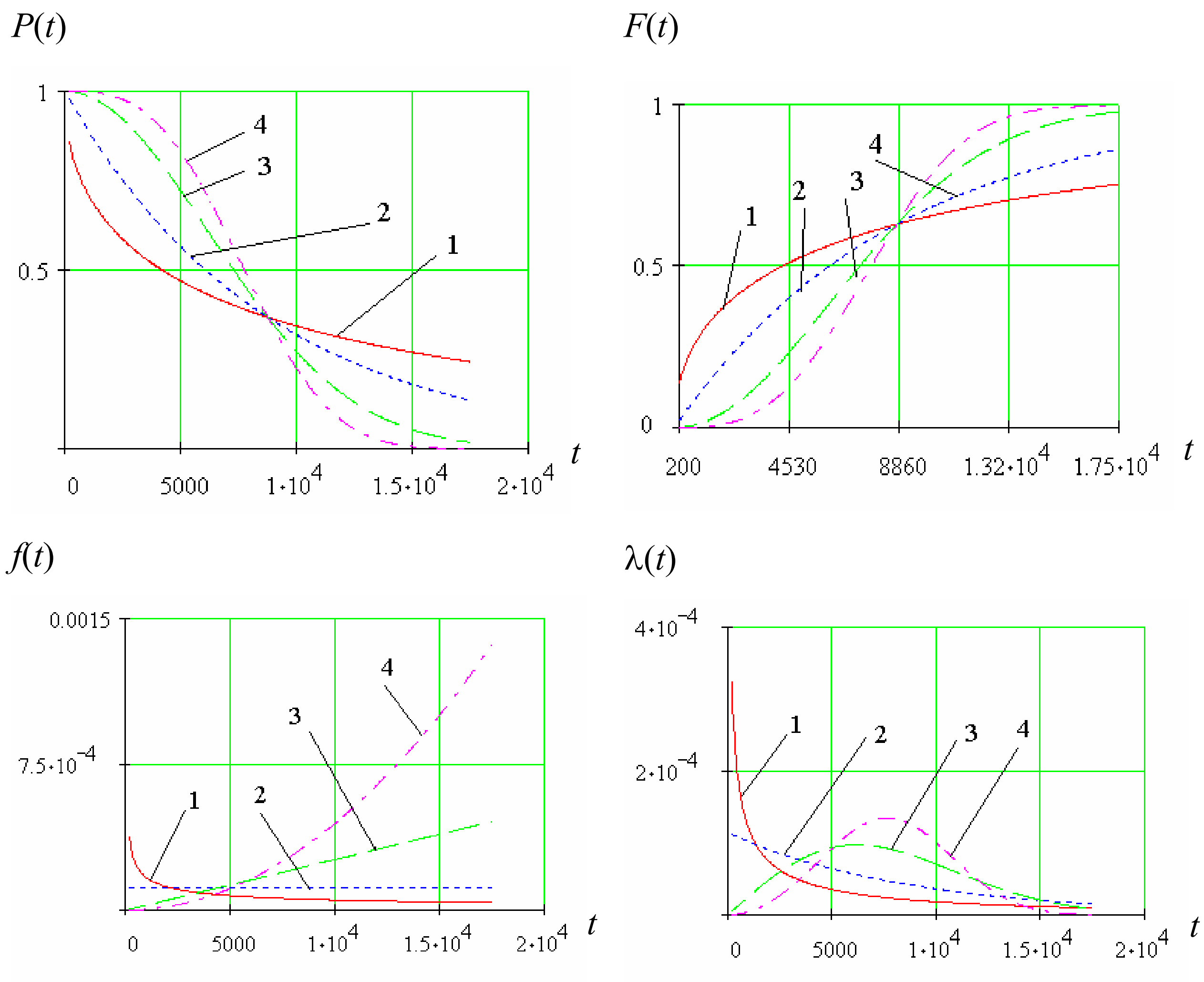
$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\beta}\right] = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\beta}\right) \qquad (3)$$

Тогда формула для определения средней наработки параллельной системы имеет вид

$$T_{cp} = \Theta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right), \qquad (4)$$

где $\Theta = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i^{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$ – параметр масштаба распределения наработки параллельной системы.

При $\beta > 1$ интенсивность отказов элементов систем с течением времени возрастает, а при $\beta < 1$ уменьшается, что позволяет использовать данную модель для описания поведения систем на этапах приработки и старения.



- Модели безотказности Вейбулла-Гнеденко при $\theta = 8760$ ч: 1- β=0,5; 2- β=1,0; 3 - β=2,0; 4 - β=3,0

Распределение Эрланга

является распределением суммы n независимых экспоненциально распределенных с параметром α случайных величин. Оно может быть также использовано для описания изменения работоспособности элемента системы, не имеющего резерва. Модель, построенная на этом распределении является более адекватной для описания поведения системы, чем экспоненциальная модель и охватывает два этапа эксплуатации, например, этапы приработки и нормальной эксплуатации. Средняя наработка до отказа рассчитывается по формуле

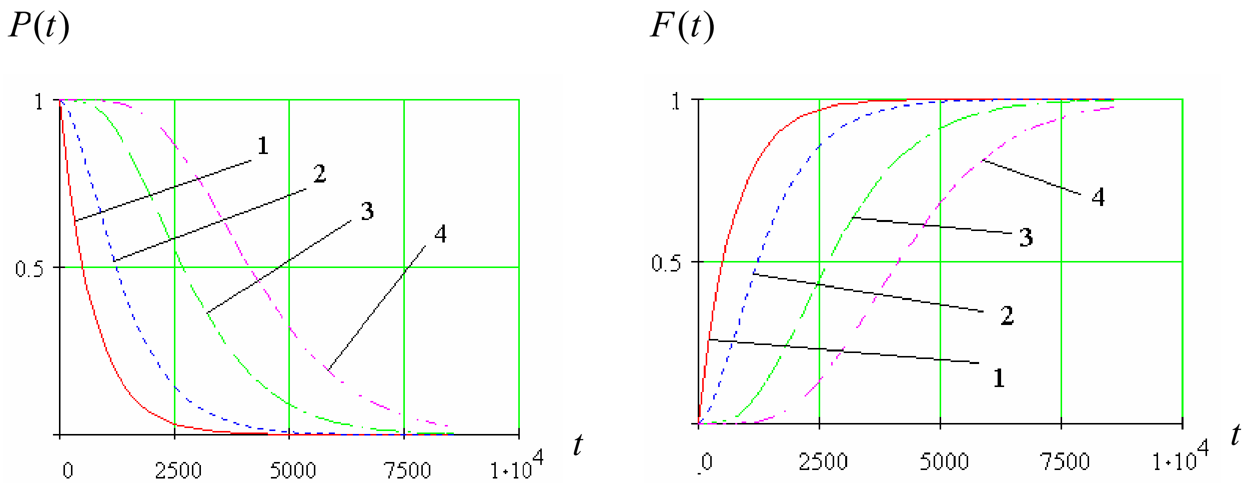
$$T_{cp} = \mathrm{M}[t] = \frac{n}{\alpha}, \qquad (5)$$

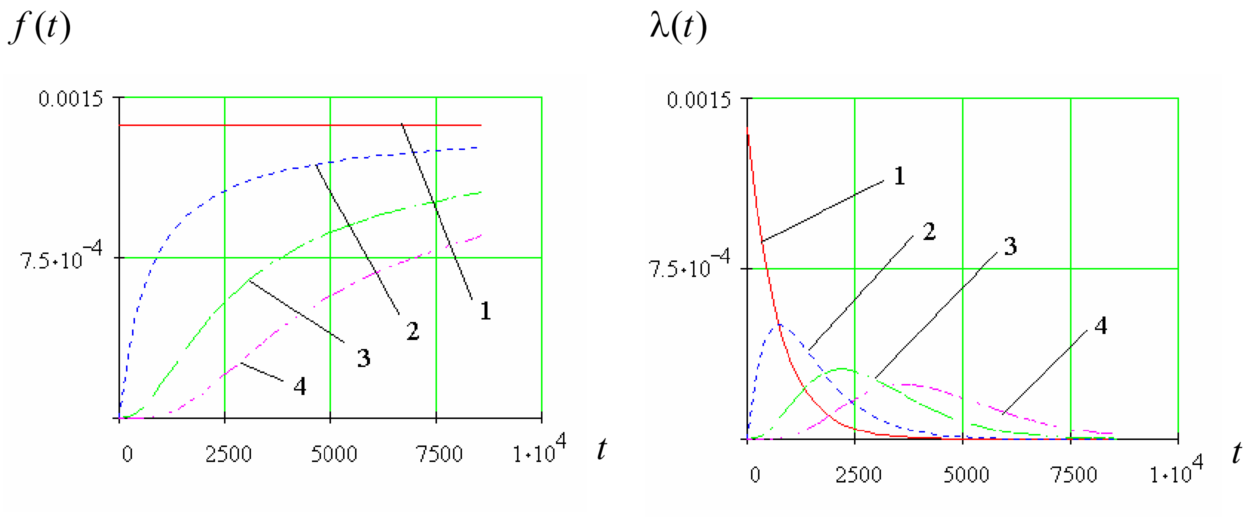
дисперсия и среднее квадратическое отклонение наработки до отказа равны:

$$D_\tau = D[t] = \mathrm{M}\left[(t - \tau)^2\right] = \frac{n}{\alpha^2}; \quad \sigma_\tau = \sqrt{\mathrm{D}[t]}. \qquad (6)$$

Такая модель соответствует ситуации, при которой в случае отказа основного элемента системы происходит его мгновенная замена резервным элементом, не работающим до момента отказа основного.

Графики функций работоспособности и производные от нее модели поведения элементов систем на основе распределения Эрланга показаны на рисунке 2. Случайная наработка будет практически нормально распределенной при $n > 16$ в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей.





- Модели безотказности на основе распределения Эрланга при $\alpha = 0.00137$ 1/час: 1- n =1; 2- n =2; 3 - n =4; 4 - n =6

Усеченное нормальное распределение (закон Гаусса)

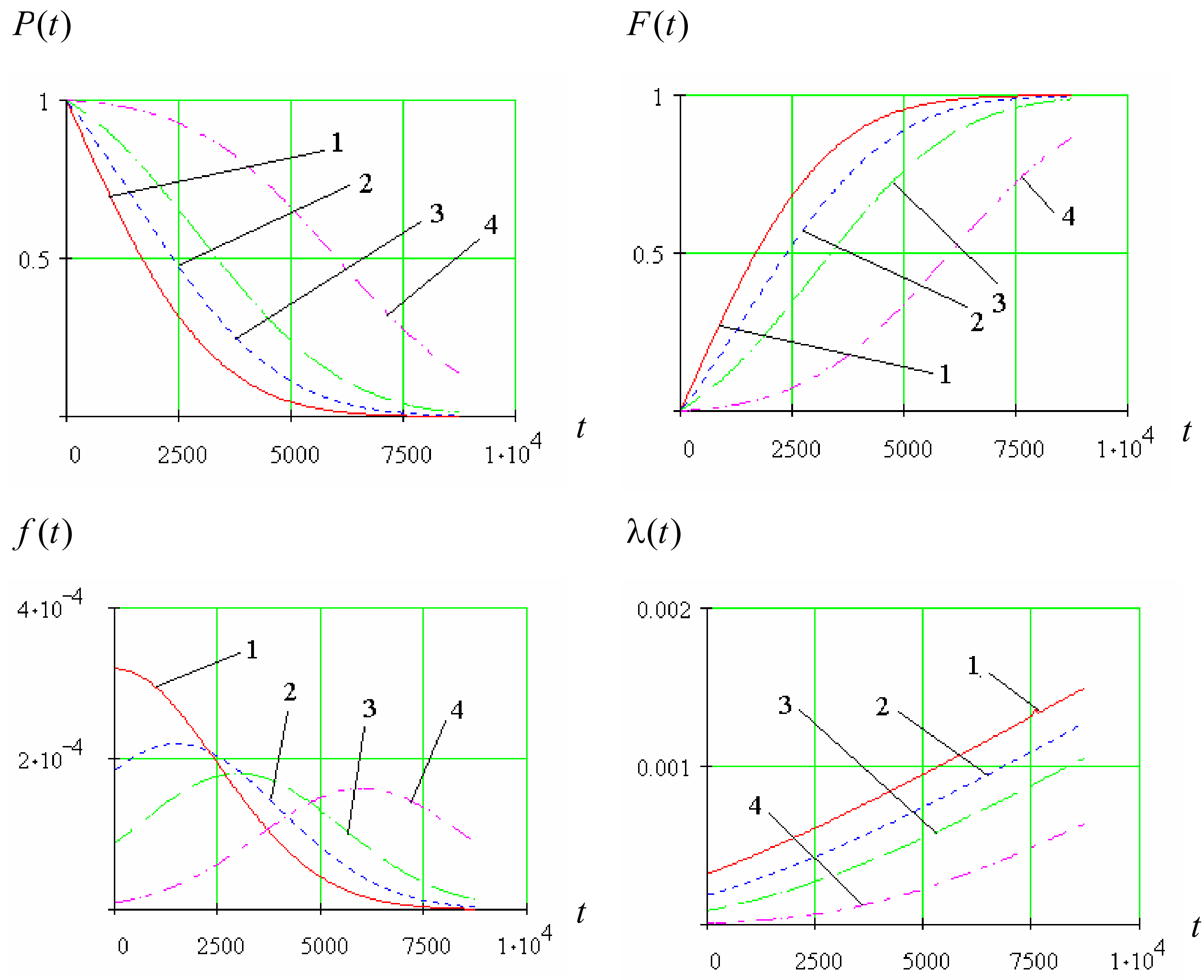
является двухпараметрическим распределением, у которого параметр σ может интерпретировать масштаб распределения, а параметр m – форму распределения.

Для аналитического описания используется специальная функция, так называемый интеграл вероятностей $\Phi(x)$ – интеграл Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{u^2}{2}) du, \qquad (7)$$

вычисление которого производится только численными методами.

Из вида графиков функции работоспособности и производных от нее моделей поведения элементов систем на основе усеченного нормального распределения (см. 0.) следует, что распределение позволяет описать поведение систем, у которых отказы наиболее вероятны как в начале, так и в некоторый заданный период эксплуатации.



Модели безотказности на основе усеченного (слева) нормального распределения при $\sigma = 2500$: 1- μ=0; 2 - μ=1500; 3 - μ=3000; 4 - μ=6000

Модель безотказности, построенная на его основе, имеет возрастающую функцию интенсивности отказов, которая линейна при $t \to \infty$. При $m/\sigma \to \infty$ характеристики усеченного нормального распределения стремятся к характеристикам нормального распределения. Практически модель безотказности на основе усеченного нормального распределения применяют, если $m < 3\sigma$, а иначе используют более простое в описании нормальное (неусеченное) распределение, которое дает достаточную точность при вычислении показателей безотказности.

Средняя наработка на отказ для систем их элементов, поведение которых подчиняется усеченному нормальному распределению, рассчитывается по формуле

$$T_{cp} = \mathrm{M}[T] = \mu + \frac{a\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right), \tag{8}$$

дисперсия и среднее квадратическое отклонение наработки до отказа равны

$$D_\tau = D[T] = \sigma^2 - \frac{a\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\mu + \frac{a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \right] \cdot \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right); \tag{9}$$

$$\sigma_\tau = \sqrt{\mathrm{D}[t]}\,.$$

Очевидно, что при $\mu > 3\sigma$ параметр с пренебрежимо малой погрешностью можно принять равным единице - $a = 1$, а выражение $\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) = 0$. Тогда средняя наработка равна $\tau = \mathrm{M}[T] = \mu$, а дисперсия наработки - $D_\tau = D[T] = \sigma^2$.

Нормальный закон (закон Гаусса) широко используется при оценке надежности изделий, на надежность которых воздействует ряд случайных факторов, каждый из которых незначительно влияет на результирующий эффект (нет доминирующих факторов). В электрических машинах обычно нормальному закону подчиняются отказы коллекторного узла, контактных колец, а также щеток (иногда подшипники и изоляция):

$$Q(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(t - m_x)^2}{2\sigma^2} \right] \partial t$$

где σ – среднеквадратическое отклонение; m_x – математическое ожидание.

Нормальный закон — двухпараметрический с параметрами σ и m_x

Для расчета вероятности события в заданном интервале t_1, t_2 пользуются формулой

$$P(t_1 < t < t_2) = \frac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{t_2 - m_x}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \Phi\left(\frac{t_1 - m_x}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

Здесь Ф(х) —интеграл вероятности (интеграл Лапласа) вида

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \partial t$$

Если используется центрированная и нормированная функция Лапласа с заменой переменных $z = (t - m_x)/\sigma$, то расчет вероятности безотказной работы во времени проводится по формуле

$$P(t) = 0.5 - \Phi\left(\frac{t - m_x}{\sigma}\right) \qquad (@)$$

Пример: Имеется батарея аккумуляторов. Время безотказной работы батареи подчиняется закону Гаусса с параметрами m_x=30 ч и σ_x=4 ч. Какова вероятность безотказной работы в течение 35 ч и как обеспечить вероятность безотказной работы Рс=0,35?

Решение: Воспользуемся формулой (@) и таблицей центрированной и нормированной функции (см. табл. П.VI.2 Кузнецов, Котеленец. Испытания и надежность ЭМС):

$$P_a(35) = 0.5 - \Phi\left(\frac{35-30}{4}\right) = 0{,}5 - \Phi(1{,}25) = 0{,}5 - 0{,}394 = 0{,}106$$

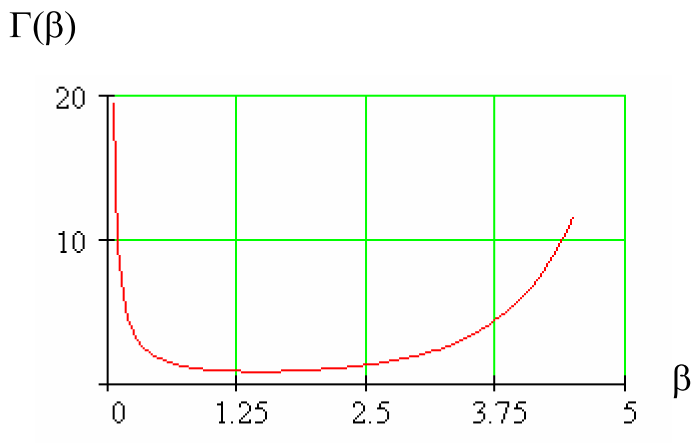
Для обеспечения более высокой надежности предусматривается резервирование. При этом структурная схема надежности представляет собой параллельное соединение элементов. Определим число батарей М, необходимых для обеспечения заданной надежности:

$$M = \frac{ln(1 - P_c)}{ln(1 - P_a)} = \frac{ln(1 - 0.35)}{ln(1 - 0.106)} = 4$$

Гамма-распределение является также основой для построения моделей безотказности. Для его аналитического описания используется гамма-функция, имеющая вид

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{p=\infty} x^{\beta-1} \exp(-x)dx, \tag{10}$$

график которой показан на рисунке 7.



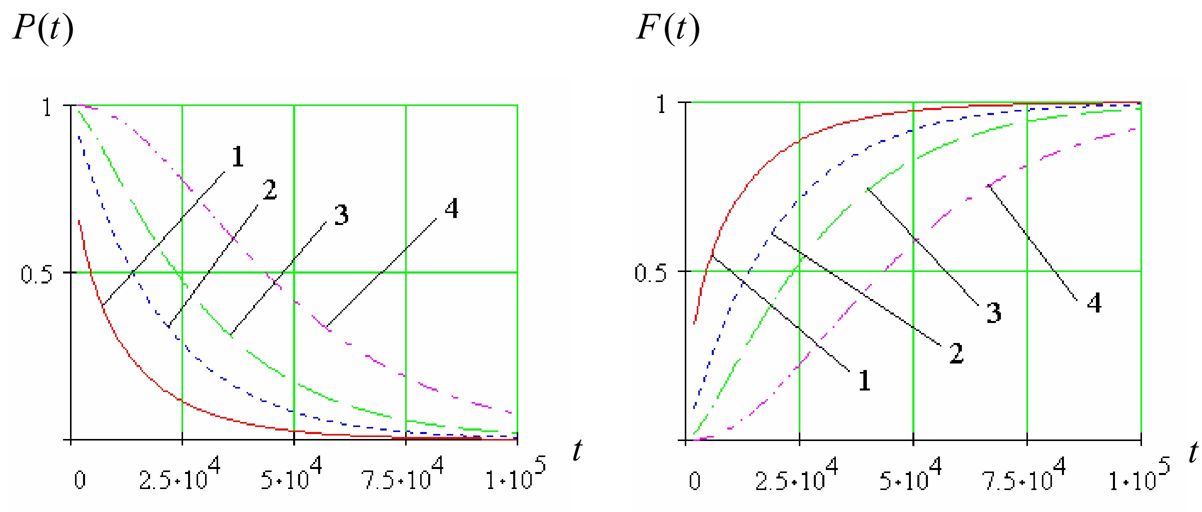
- График гамма-функции

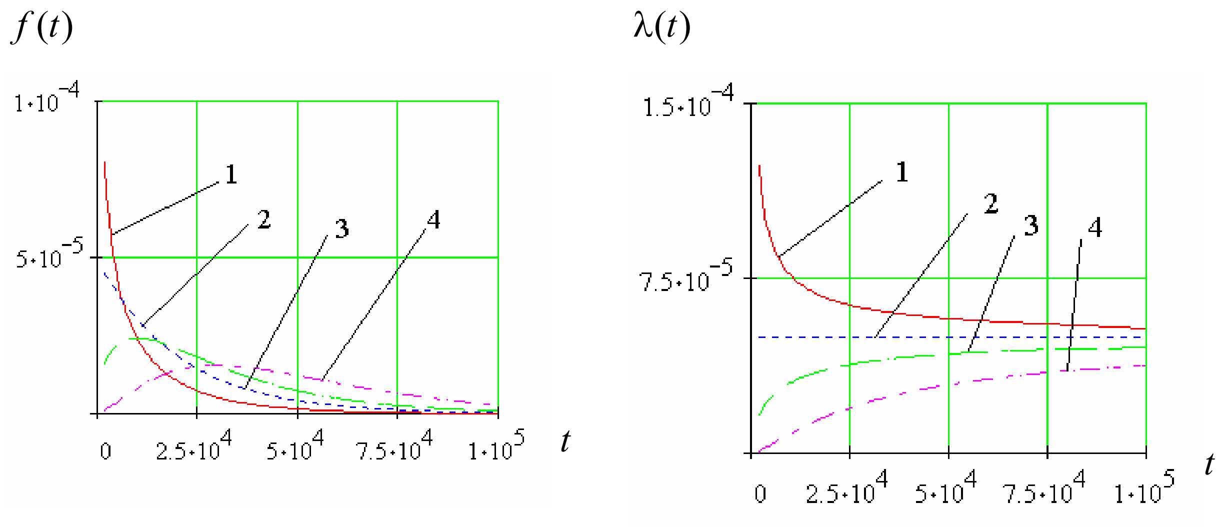
Если верхний предел интегрирования сделать переменным $p = \alpha t$, то функциональная зависимость (10) примет вид

$$\Gamma(t,\alpha,\beta) = \int_0^{\alpha \cdot t} x^{\beta-1} \exp(-x)dx \tag{11}$$

и будет функцией трех аргументов: параметра t, которому придается физический смысл времени наработки; параметра α, который определяет масштаб распределения; параметра β, определяющего форму распределения. Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} \Gamma(t,\alpha,\beta) = \Gamma(\beta)$, то чтобы использовать гамма-функцию в качестве модели безотказности элементов системы, ее нормируют. Отношение функций (10) и (11) является функцией распределения, характеризующей гамма-распределенную случайную величину.

Графики функции работоспособности и производных от нее моделей поведения элементов систем на основе гамма-распределения (0) наглядно отражают существенные свойства данной модели поведения элементов и систем. Функция интенсивности отказов является возрастающей при $\beta > 1$ и убывающей при $\beta < 1$. При $\beta > 1$ значение интенсивности отказов вначале равно нулю $\lambda(0) = 0$, а затем асимптотически приближается к некоторому постоянному значению, определяемому параметром масштаба распределения, т.е. $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = \alpha$. При $\beta < 1$ вначале интенсивность отказов высокая, так как $\lim\limits_{t \to 0} \lambda(t) = \infty$, но с течением времени становится также практически постоянной $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = \alpha$.





\- Модели безотказности на основе гамма-распределения при

$\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/час : 1- β=0.5; 2 - β=1.0; 3 - β=1.5; 4 - β=2.0

Одним из важнейших свойств распределения является то, что если $\beta = n$, где n - произвольное целое положительное число, то гамма-распределение представляет собой распределение Эрланга. Следовательно, гамма-распределение следует использовать для описания поведения элементов систем в том случае, если с помощью распределения Эрланга не удается добиться адекватного описания поведения элемента или системы.

Средняя наработка и дисперсия наработки до отказа рассчитываются по формулам:

$$\tau = \mathrm{M}[T] = \frac{\beta}{\alpha}; \; D_\tau = D[T] = \frac{\beta}{\alpha^2}. \qquad (12)$$

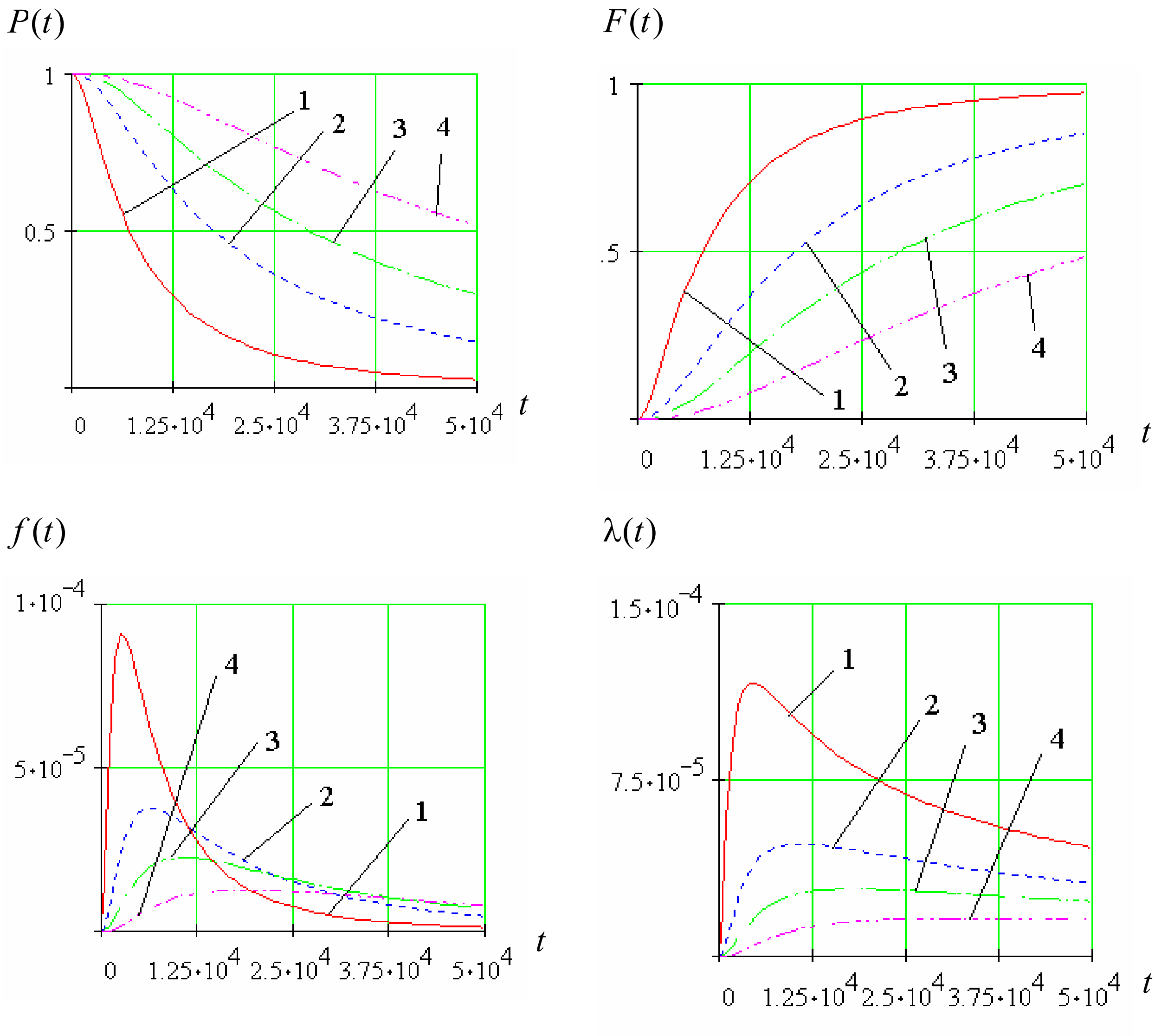
Логарифмически нормальное (логнормальное) распределение для построения моделей безотказности используется сравнительно редко. Это можно объяснить, анализируя модели безотказности элементов систем (0).

Логарифмически-нормальное распределение используется при описании надежности металлоконструкций, отказов электромашинных усилителей, некоторых типов электромашинных преобразователей и т, д. Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} exp\left[-\frac{(ln\, t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \partial t$$

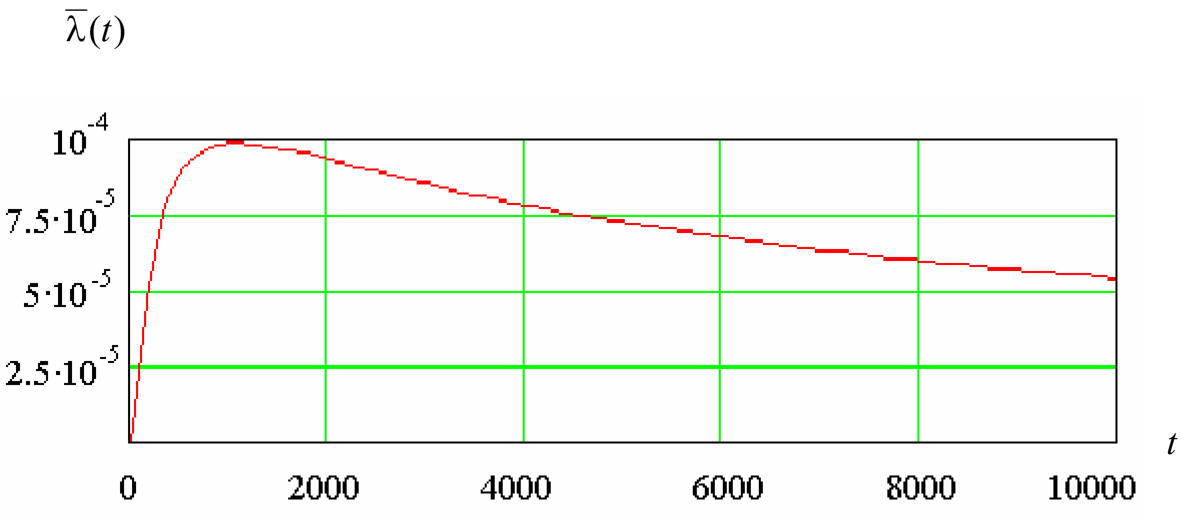
где μ — математическое ожидание натурального логарифма случайной величины t, обозначающей наработку на отказ.

Расчет *P(t)* осуществляется с помощью специальных таблиц .



Модели безотказности на основе логарифмически нормального распределения при $\sigma = 1$: 1- *m*= 8.883; 2 - *m* = 9.771; 3 - *m*= 10.285; 4 - *m* = 10.857

Интенсивность логарифмически нормально распределенных отказов системы является немонотонной функцией. В соответствии с критерием монотонности средней интенсивности отказовна этапе приработки система, отвечающая модели безотказности на основе логнормального распределения, "стареет", а на остальных этапах "молодеет" (0).



- Изменение во времени средней интенсивности отказов системы, описанной моделью на основе логнормального распределения

Средняя наработка на отказ для систем их элементов, случайные моменты отказов которых подчиняются логнормальному распределению, рассчитывается по формуле

$$\tau = \mathrm{M}[T] = exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right), \tag{13}$$

а дисперсия наработки до отказа равна

$$D_\tau = D[T] = exp(2m + \sigma^2)\left(exp(\sigma^2) - 1\right). \tag{14}$$

Несмотря на то, что распределение является двухпараметрическим, параметры формы m и масштаба σ не имеют достаточно просто интерпретируемой функциональной связи с показателями безотказности.

Биномиальное распределение Если производится серия N независимых опытов, причём вероятность появления изучаемого события в каждом опыте постоянна и равна *p*, а вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность $P_{N,i}$ появления данного события точно *i* раз равна

$$P_{N,i} = C_N^i p^i q^{N-i}, \quad M[i] = Np, \quad \sigma_i = \sqrt{Npq},$$

где $C_N^i = \dfrac{N!}{i!(N-i)!}$

Пример. На электростанции работает четыре однотипных генератора. Вероятность аварийного повреждения каждого из них $p = 0{,}02$. Составить закон распределения вероятного числа повреждённых генераторов.

Решение. Число повреждённых генераторов является дискретной случайной величиной. Пользуясь формулой биномиального распределения, находим:

Число повреждённых генераторов	0	1	2	3	4
Вероятность	0,922	0,075	0,023	0,00003	0,0000001

Распределение Пуассона. Этот закон позволяет определить вероятность $P_k(t)$ наступления ровно *k* событий за промежуток времени *t*:

$$p_k(t) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \; M[k] = a = \lambda t, \; \sigma_k = \sqrt{\lambda t},$$

где a – параметр закона распределения – математическое ожидание числа событий за время *t*; λ – интенсивность случайного события.

Закон распределения Пуассона может быть получен из биномиального распределения при достаточно больших *N* и малых *p* тогда

$$M[X] = a = Np.$$

Пример 1. Выпущена партия резисторов 100000 штук. Вероятность того, что резистор имеет брак, $p = 0{,}0001$. Найти вероятность того, что в партии ровно пять бракованных резисторов.

Решение. $a = Np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10.$

$$P_5 = \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = 0{,}375$$

Пример 2. Определить вероятность того, что за 500 ч работы произойдет два отказа в сложном изделии, если известно, что интенсивность отказов $\lambda = 1 \cdot 10^{-3}$.

Решение. $P_2(500) = \dfrac{\left(10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^2\right)}{2!} e^{-10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^2} = 0{,}075.$

Распределение χ^2. Оно играет большую роль при решении задач, связанных с оценкой параметров надежности, определяемых при испытаниях или эксплуатации оборудования.

Рассмотрим *k* независимых случайных величин $x_1, x_2 .... x_k$ каждая из которых распределена по нормальному закону с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Сумма квадратов этих величин обозначается

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \, , \; 0 \le \chi \le \infty$$

Параметр *k* называется *числом степеней свободы*.

Плотность распределения χ^2 имеет вид

$$f_{x^2}(t) = \frac{t^{k/2-1}}{\Gamma(k/2) \cdot 2^{k/2}} e^{-t/2}, \; (t > 0).$$